В соответствии с этим же правилом четырехрядная матрица плотности нейтрино должна быть записана как

$$\rho=\frac{1}{4}(1+\gamma^5)(\gamma p)(1-\gamma^5)=\frac{1}{2}(1+\gamma^5)(\gamma p). \qquad (30,18)$$

В спинорном представлении она сводится, как и должно быть, к двухрядной матрице (30,13)

$$\rho=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon-\sigma p & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные формулы для антинейтрино отличаются от написанных изменением знака перед γ^5.

Нейтрино — электрически нейтральная частица. Нейтрино с описанными выше свойствами не является, однако, истинно нейтральной частицей. Отметим в этой связи, что «нейтринное поле», описываемое двухкомпонентным спинором, по числу возможных для него состояний частиц (но, разумеется, не по другим своим физическим свойствам) эквивалентно истинно нейтральному полю, описываемому четырехкомпонентным биспинором. Вместо состояний частиц и античастиц с определенными спиральностями здесь имелось бы столько же состояний одной частицы с двумя возможными значениями спиральности и автоматически соблюдалась бы симметрия по отношению к инверсии. Отметим, однако, что равенство нулю массы «четырехкомпонентного» нейтрино имело бы, так сказать, «случайный» характер, поскольку оно не было бы связано со свойствами симметрии описывающего его волнового уравнения (допускающего также и отличную от нуля массу). Поэтому учет различных взаимодействий такой частицы автоматически привел бы к появлению хотя и малой, но все же не равной строго нулю массы покоя.

§ 31. Волновое уравнение для частицы со спином 3/2

Частица со спином $^3/_2$ описывается в своей системе покоя симметричным 3-спинором третьего ранга (с $2s+1=4$ независимыми компонентами). Соответственно в произвольной системе отсчета в ее описании могут участвовать 4-спиноры $\xi^{\alpha\beta\dot{\gamma}}$, $\eta_{\dot{\alpha}\beta\gamma}$ и $\zeta^{\alpha\beta\gamma}$, $\chi_{\dot{\alpha}\beta\dot{\gamma}}$, каждый из которых симметричен по всем одинаковым (пунктирным или непунктирным) индексам; при инверсии спиноры в первой и во второй паре переходят друг в друга.

Для того чтобы в системе покоя 4-спиноры $\xi^{\alpha\beta\dot{\gamma}}$ и $\eta_{\dot{\alpha}\beta\gamma}$ переходили в 3-спиноры, симметричные по всем трем индексам, они должны удовлетворять условиям

$$p^{\dot{\alpha}\beta}\eta_{\dot{\alpha}\beta\gamma}=0, \qquad p_{\alpha\dot{\beta}}\xi^{\alpha\beta\dot{\gamma}}=0. \qquad (31,1)$$

Действительно, в системе покоя

$$p^{\dot\alpha\beta} \to p_0\delta_{\dot\alpha}^{\beta} = m\delta_{\dot\alpha}^{\beta}$$

(как это видно из (20,1)). Поэтому условия (31,1) приводят к равенствам

$$\delta_{\dot\alpha}^{\beta}\eta'^{\dot\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0, \qquad \delta_{\alpha}^{\dot\beta}\xi'^{\alpha}{}_{\dot\beta\dot\gamma} = 0,$$

где буквы со штрихом обозначают соответствующие 3-спиноры; другими словами, эти спиноры дают нуль при упрощении по индексам $\alpha\beta$, а это и означает, что они симметричны по этим индексам, а потому и по всем трем индексам.

Дифференциальная связь между спинорами ξ и η устанавливается соотношениями

$$p^{\delta\dot\gamma}\eta_{\alpha\delta}^{\dot\beta} = m\xi_{\alpha}^{\dot\beta\dot\gamma}, \qquad p_{\delta\dot\gamma}\xi_{\alpha}^{\dot\beta\dot\gamma} = m\eta_{\alpha\delta}^{\dot\beta}. \tag{31,2}$$

Симметричность левых сторон этих уравнений (по индексам $\dot\beta$, $\dot\gamma$ или α, δ) обеспечивается условиями (31,1), в силу которых они обращаются в нуль при упрощении по всем индексам. В системе покоя 3-спиноры ξ' и η' в силу уравнений (31,2) совпадают. Исключив из уравнений (31,2) η или ξ, найдем, что каждая из компонент спиноров ξ и η удовлетворяет уравнению второго порядка

$$(p^2 - m^2)\xi^{\alpha\dot\beta\dot\gamma} = 0. \tag{31,3}$$

Совокупность уравнений (31,1—2) составляет полную систему волновых уравнений для частицы со спином $^3/_2$ [1]). Добавление спиноров ζ, χ не привело бы ни к чему новому. Они строятся согласно

$$m\zeta^{\alpha\beta\dot\gamma} = p^{\alpha\dot\delta}\eta_{\dot\delta}^{\beta\dot\gamma}, \qquad m\chi_{\dot\alpha\beta\dot\gamma} = p_{\dot\alpha\delta}\xi_{\beta\dot\gamma}^{\delta}.$$

Уравнения частиц со спином $^3/_2$ могут быть сформулированы также и в ином виде, в котором используются векторные аспекты свойств спиноров (*W. Rarita*, *J. Schwinger*, 1941; *А. С. Давыдов*, *И. Е. Тамм*, 1942). Паре спинорных индексов $\alpha\dot\beta$ сопоставляется один четырехмерный векторный индекс μ. Поэтому компонентам спинора третьего ранга $\xi^{\alpha\dot\beta\dot\gamma}$ можно привести в соответствие компоненты «смешанных» величин $\psi_{\mu}^{\dot\gamma}$ с одним векторным и одним спинорным индексом. Аналогично, спинору $\eta^{\dot\beta\alpha\gamma}$ ставятся в соответствие величины ψ_{μ}^{γ}, а совокупности обоих спиноров — «векторный» биспинор ψ_{μ} (биспинорный индекс не выписываем). Волновое уравнение запишется тогда в виде

[1]) О лагранжевой формулировке этих уравнений см. указанную на с. 77 статью *Фирца* и *Паули*.

«уравнения Дирака» для каждой из векторных компонент ψ_μ:

$$(\gamma p - m)\psi_\mu = 0 \tag{31,4}$$

с дополнительным условием

$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0. \tag{31,5}$$

Используя выражения для матриц γ^μ в спинорном представлении и формулы связи между компонентами спинора и вектора (18,6—7), легко убедиться в том, что уравнения (31,2) содержатся в (31,4), а условие (31,5) эквивалентно условию симметричности спиноров $\xi^{\alpha\beta\dot\gamma}$ и $\eta^{\dot\alpha\beta\gamma}$ по индексам $\beta\dot\gamma$ или $\beta\gamma$. Умножив уравнение (31,4) на γ^μ, получим ввиду (31,5)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu p_\nu \psi_\mu = 0$$

или, воспользовавшись правилами коммутации матриц γ^μ,

$$2g^{\mu\nu} p_\nu \psi_\mu - \gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu \psi_\mu = 0. \tag{31,6}$$

Второй член снова обращается в нуль в силу (31,5), а первый дает

$$p^\mu \psi_\mu = 0. \tag{31,7}$$

Легко видеть, что это условие, автоматически следующее из (31,4—5), эквивалентно условиям (31,1).

Наконец, еще один способ формулировки волнового уравнения состоит во введении величин ψ_{ikl} (i, k, $l = 1, 2, 3, 4$) с тремя биспинорными индексами, по которым ψ_{ikl} симметричны (*V. Bargmann, E. P. Wigner*, 1948). Совокупность этих величин эквивалентна совокупности компонент всех четырех спиноров ξ, η, ζ, χ. Волновое уравнение записывается в виде системы «уравнений Дирака»

$$p_\mu \gamma^\mu{}_{im} \psi_{mkl} = m\psi_{ikl}. \tag{31,8}$$

Легко видеть, что эти уравнения уже приводят к нужному числу (четыре) независимых компонент ψ_{ikl}, и постановка дополнительных условий не требуется. Действительно, в системе покоя (31,8) сводятся к равенствам

$$\gamma^0_{lm} \psi_{mkl} = \psi_{ikl},$$

в силу которых обращаются в нуль (в стандартном представлении) все компоненты с i, k, $l = 3, 4$, т. е. ψ_{ikl} сводятся к компонентам 3-спинора третьего ранга.

Изложенные результаты очевидным образом обобщаются для частиц с любым полуцелым спином s. При описании уравнениями вида (31,4—5) волновая функция будет симметричным 4-тензором ранга $(2s-1)/2$ с одним биспинорным индексом. При описании же уравнениями вида (31,8) волновая функция будет иметь $2s$ биспинорных индексов, по которым она симметрична.