ГЛАВА IV

ЧАСТИЦА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

§ 32. Уравнение Дирака для электрона во внешнем поле

Волновые уравнения свободных частиц по существу выражают собой лишь те свойства, которые связаны с общими требованиями пространственно-временной симметрии. Происходящие же с частицами физические процессы зависят от свойств их взаимодействий.

Описание электромагнитных взаимодействий частиц в релятивистской квантовой теории оказывается возможным путем обобщения способа, применяемого для этой цели в классической и нерелятивистской квантовой теориях.

Этот метод, однако, применим для описания электромагнитных взаимодействий лишь частиц, не способных к сильным взаимодействиям. Сюда относятся электроны (и позитроны) и, таким образом, для существующей теории оказывается доступной вся огромная область квантовой электродинамики электронов. Не способны к сильным взаимодействиям также и нестабильные частицы — мюоны; они описываются той же квантовой электродинамикой в области явлений, происходящих за времена, малые по сравнению с продолжительностью их жизни (связанной со слабыми взаимодействиями).

В этой главе мы рассмотрим круг задач квантовой электродинамики, ограниченный рамками теории одной частицы. Это — задачи, в которых число частиц не меняется, а взаимодействие может быть введено при помощи понятия внешнего электромагнитного поля. Помимо условий, позволяющих рассматривать внешнее поле как заданное, пределы применимости такой теории ограничены также условиями, связанными с так называемыми радиационными поправками.

Волновое уравнение электрона в заданном внешнем поле можно получить так же, как это делается в нерелятивистской теории (см. III, § 111). Пусть $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ — 4-потенциал внешнего электромагнитного поля ($\mathbf{A}$ — векторный, Φ — скалярный потенциалы). Мы получим искомое уравнение, заменив в уравнении Дирака оператор 4-импульса $\hat{p}$ разностью $\hat{p} - eA$, где e —

заряд частицы [1]):

$$[\gamma(\hat{p} - eA) - m]\psi = 0. \tag{32,1}$$

Соответствующий этому уравнению гамильтониан получается путем такой же замены из (21,13):

$$\hat{H} = \alpha(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}) + \beta m + e\Phi. \tag{32,2}$$

Инвариантность уравнения Дирака при калибровочном преобразовании потенциалов электромагнитного поля выражается в том, что его вид остается неизменным, если одновременно с преобразованием $A \to A + i\hat{p}\chi$ (где χ — произвольная функция) преобразовать волновую функцию согласно [2])

$$\psi \to \psi e^{ie\chi} \tag{32,3}$$

(ср. аналогичное преобразование для уравнения Шредингера III, § 111).

Плотность тока, выраженная через волновую функцию, дается той же формулой (21,11) $j = \bar{\psi}\gamma\psi$, что и в отсутствие внешнего поля. Легко видеть, что при повторении с уравнением (32,1) (и написанным ниже уравнением (32,4)) тех же выкладок, которые были произведены при выводе (21,11), внешнее поле выпадает, и уравнение непрерывности оказывается справедливым для прежнего выражения тока.

Произведем над уравнением (32,1) операцию зарядового сопряжения. Для этого пишем уравнение

$$\bar{\psi}[\gamma(\hat{p} + eA) + m] = 0, \tag{32,4}$$

которое получается комплексным сопряжением из (32,1) так же, как было получено в свое время уравнение (21,9) (при этом надо помнить, что 4-вектор A вещественен). Переписав это уравнение в виде

$$[\tilde{\gamma}(\hat{p} + eA) + m]\bar{\psi} = 0,$$

умножив его слева на матрицу U_C и воспользовавшись соотношениями (26,3), найдем

$$[\gamma(\hat{p} + eA) - m](\hat{C}\psi) = 0. \tag{32,5}$$

Таким образом, зарядово-сопряженная волновая функция удовлетворяет уравнению, отличающемуся от исходного измене-

---

[1]) Подразумевается заряд вместе со своим знаком, так что для электрона $e = -|e|$.

[2]) Преобразование (32,3) с функцией $\chi(t, \mathbf{r})$ иногда называют «локальным калибровочным преобразованием» в отличие от «глобального калибровочного преобразования» (12,10) с постоянной фазой α.

нием знака заряда. С другой стороны, операция зарядового сопряжения означает переход от частиц к античастицам. Мы видим, что если частицы обладают электрическим зарядом, то знаки заряда электрона и позитрона автоматически оказываются противоположными.

Уравнение первого порядка (32,1) может быть преобразовано в уравнение второго порядка путем применения к (32,1) оператора $\gamma(\hat{p}-eA)+m$:

$$[\gamma^\mu\gamma^\nu(\hat{p}_\mu-eA_\mu)(\hat{p}_\nu-eA_\nu)-m^2]\psi=0.$$

Произведение $\gamma^\mu\gamma^\nu$ заменяем на

$$\gamma^\mu\gamma^\nu=\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu)+\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)=g^{\mu\nu}+\sigma^{\mu\nu},$$

где $\sigma^{\mu\nu}$ — антисимметричный «матричный 4-тензор» (28,2). При умножении на $\sigma^{\mu\nu}$ можно произвести антисимметризацию, т. е. заменить

$$(\hat{p}_\mu-eA_\mu)(\hat{p}_\nu-eA_\nu)\to\frac{1}{2}\{(\hat{p}_\mu-eA_\mu)(\hat{p}_\nu-eA_\nu)\}_-=$$
$$=\frac{1}{2}e(-A_\mu\hat{p}_\nu+\hat{p}_\nu A_\mu-\hat{p}_\mu A_\nu+A_\nu\hat{p}_\mu)=$$
$$=\frac{1}{2}ie(\partial_\nu A_\mu-\partial_\mu A_\nu)=-\frac{ie}{2}F_{\mu\nu}$$

($F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ — тензор электромагнитного поля). В результате получим уравнение второго порядка в виде

$$\left[(\hat{p}-eA)^2-m^2-\frac{i}{2}eF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right]\psi=0. \qquad (32,6)$$

Произведение $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ можно записать в трехмерном виде, выразив его через компоненты

$$\sigma^{\mu\nu}=(\boldsymbol{\alpha},\ i\boldsymbol{\Sigma}),\qquad F^{\mu\nu}=(-\mathbf{E},\ \mathbf{H}).$$

Тогда

$$[(\hat{p}-eA)^2-m^2+e\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{H}-ie\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E}]\psi=0, \qquad (32,7)$$

или, в обычных единицах,

$$\left[\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{e}{c}\Phi\right)^2-\left(i\hbar\nabla+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2-m^2c^2+\right.$$
$$\left.+\frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{H}-i\frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E}\right]\psi=0. \qquad (32,7a)$$

Появление в этих уравнениях членов, содержащих поля **E** и **H**, связано с наличием у частицы спина; мы вернемся к их обсуждению в следующем параграфе.

Среди решений уравнения второго порядка имеются, конечно, также и «лишние», не удовлетворяющие исходному уравнению первого порядка (32,1) (они представляют собой решения уравнения (32,1) с измененным знаком перед m). Отбор нужных решений в конкретных случаях обычно очевиден и не представляет труда. Регулярный метод отбора состоит в том, что если φ есть произвольное решение уравнения второго порядка, то решение правильного уравнения первого порядка есть

$$\psi = [\gamma(\hat{p} - eA) + m]\varphi. \tag{32,8}$$

Действительно, умножая это равенство на $\gamma(\hat{p} - eA) - m$, мы видим, что правая часть обращается в нуль, если φ удовлетворяет уравнению (32,6).

Следует подчеркнуть, что способ введения внешнего поля в релятивистское волновое уравнение путем замены $\hat{p}$ на $\hat{p} - eA$ не самоочевиден. В его проведении мы по существу опирались на дополнительный принцип: указанная замена должна производиться в уравнениях первого порядка. Именно в результате этого в уравнении (32,6) появились дополнительные члены, которые не возникли бы, если бы замена была произведена непосредственно в уравнении второго порядка.

Среди стационарных решений уравнения Дирака во внешнем поле могут иметься состояния как непрерывного, так и дискретного спектра. Как и в нерелятивистской теории, состояния непрерывного спектра соответствуют инфинитному движению, при котором частица может находиться на бесконечности, где ее можно рассматривать как свободную. Поскольку собственные значения гамильтониана свободной частицы равны $\pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, ясно, что непрерывный спектр собственных значений энергии лежит при $\varepsilon \geqslant m$ и при $\varepsilon \leqslant -m$. Если же $-m < \varepsilon < m$, то частица не может находиться на бесконечности, так что движение финитно и состояние принадлежит дискретному спектру.

Как и для свободных частиц, волновые функции с «положительной частотой» ($\varepsilon > 0$) и с «отрицательной частотой» ($\varepsilon < 0$) определенным образом входят в схему вторичного квантования. Для частиц во внешнем поле эта схема естественно обобщается путем замены плоских волн в формулах (25,1) соответственно нормированными собственными функциями уравнения Дирака $\psi_n^{(+)}$ и $\psi_n^{(-)}$, относящимися к положительным $\left(\varepsilon_n^{(+)}\right)$ и отрицательным $\left(-\varepsilon_n^{(-)}\right)$ частотам:

$$\begin{aligned}\hat{\psi} &= \sum_n \left\{\hat{a}_n \psi_n^{(+)} \exp\left(-i\varepsilon_n^{(+)}t\right) + \hat{b}_n^+ \psi_n^{(-)} \exp\left(i\varepsilon_n^{(-)}t\right)\right\},\\ \hat{\bar{\psi}} &= \sum_n \left\{\hat{a}_n^+ \bar{\psi}_n^{(+)} \exp\left(i\varepsilon_n^{(+)}t\right) + \hat{b}_n \bar{\psi}_n^{(-)} \exp\left(-i\varepsilon_n^{(-)}t\right)\right\}.\end{aligned} \tag{32,9}$$

При этом надо иметь в виду, что по мере углубления потенциальной ямы уровни энергии могут перейти границу $\varepsilon = 0$, т. е.

из положительных сделаться отрицательными (или, для потенциала другого знака, из отрицательных — положительными). Тем не менее из соображений непрерывности надо продолжать считать эти уровни электронными (а не позитронными). Другими словами, к электронным следует относить все состояния, которые при бесконечно медленном выключении поля примыкают к положительной границе непрерывного спектра ($\varepsilon = m$).

Хотя уравнение Дирака для электрона во внешнем поле и дает возможность, как уже было сказано, решать широкий круг задач квантовой электродинамики, необходимо в то же время подчеркнуть, что применимость понятия внешнего поля в рамках одночастичной задачи в релятивистской теории все же ограничена. Эта ограниченность связана с самопроизвольным рождением электрон-позитронных пар, возникающим в достаточно сильных полях (см. ниже, § 35, 36).

Мы не будем рассматривать в этой книге вопрос о введении внешнего поля в волновые уравнения частиц с отличным от $^1/_2$ спином, поскольку он не имеет прямого физического смысла — реальные частицы с такими спинами являются адронами и их электромагнитные взаимодействия не могут быть описаны волновыми уравнениями. В этой связи следует отметить, что эти уравнения могут приводить и к физически противоречивым результатам. Так, волновое уравнение для частиц со спином 0 имеет комплексные (с мнимыми частями обоих знаков) уровни энергии в поле достаточно глубокой потенциальной ямы. Волновое уравнение для частиц со спином $^3/_2$ приводит к нарушению причинности, проявляющемуся в появлении решений, распространяющихся со сверхсветовой скоростью.

Задача

Определить уровни энергии электрона в постоянном магнитном поле.

Решение. Векторный потенциал: $A_x = A_z = 0$, $A_y = Hx$ (поле H направлено по оси z). Сохраняются (наряду с энергией) компоненты p_y, p_z обобщенного импульса.

Воспользуемся уравнением второго порядка для вспомогательной функции φ (см. (32,8)) и примем, что φ есть собственная функция оператора Σ_z (с собственным значением $\sigma = \pm 1$), а также операторов $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$. Уравнение для φ имеет вид

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + (eHx - p_y)^2 - eH\sigma\right\}\varphi = \left(\varepsilon^2 - m^2 - p_z^2\right)\varphi.$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением Шредингера для линейного осциллятора. Собственные значения ε определяются формулой

$$\varepsilon^2 - m^2 - p_z^2 = |e|\,H\,(2n+1) - eH\sigma, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(ср. III, § 112). Отметим, что волновая функция ψ, которую следует определить из φ по формуле (32,8), не является собственной функцией оператора Σ_z — в соответствии с тем, что для движущейся частицы спин не является сохраняющейся величиной.