В конце предыдущего параграфа была получена формула (35,11), связывающая вычет функции $e^{2i\delta_\varkappa}$ в ее полюсе с коэффициентом в асимптотическом выражении волновой функции соответствующего связанного состояния. В случае кулонова поля, однако, эта формула должна быть несколько видоизменена в связи с тем, что вместо постоянного фазового сдвига $\delta_\varkappa$ (как это было в (35,7)) в (36,16) стоит сумма $\delta_\varkappa + \nu\ln(2pr)$. В левой стороне (35,11) надо поэтому писать не $e^{2i\delta_\varkappa}$, а

$$\exp[2i\delta_\varkappa + 2i\nu\ln(2pr)] \to e^{2i\delta_\varkappa}(2i\lambda r)^{2(n_r+\gamma)}.$$

Используя (36,21) и определяя из (35,11) коэффициент A_0 (который будет теперь степенной функцией r), находим асимптотический вид нормированной волновой функции дискретного спектра:

$$f = \left[\frac{(Z\alpha m/\lambda - \varkappa)(m+\varepsilon)\lambda^2}{2n_r!\,Z\alpha m^2\Gamma(2\gamma+1+n_r)}\right]^{1/2}\frac{e^{-\lambda r}}{r}(2\lambda r)^{n_r+\gamma}. \qquad (36,22)$$

Эта формула была уже использована для определения коэффициента в (36,11).

§ 37. Рассеяние в центрально-симметричном поле

Напишем асимптотическое выражение для волновой функции частицы, рассеивающейся в поле неподвижного силового центра, в виде [1])

$$\psi = u_{\varepsilon p}e^{ipz} + u'_{\varepsilon p'}e^{ipr}/r. \qquad (37,1)$$

Здесь $u_{\varepsilon p}$ — биспинорная амплитуда падающей плоской волны. Биспинор же $u'_{\varepsilon p'}$ является функцией направления рассеяния $\mathbf{n}'$, а при каждом заданном значении $\mathbf{n}'$ совпадает по форме (но, конечно, не по нормировке!) с биспинорной амплитудой плоской волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{n}'$.

Мы видели в § 24, что биспинорная амплитуда плоской волны полностью определяется заданием двухкомпонентной величины — 3-спинора w, представляющего собой нерелятивистскую волновую функцию в системе покоя частицы. Через этот спинор выражается и плотность потока: она пропорциональна w^*w (с коэффициентом пропорциональности, зависящим только от энергии ε и, следовательно, одинаковым для падающих и рассеянных частиц). Поэтому сечение рассеяния $d\sigma = (w'^*w'/w^*w)\,do$

---

[1]) В § 37, 38 p обозначает $|\mathbf{p}|$, а в качестве индексов у амплитуды пишем отдельно ε и $\mathbf{p}$.

или, если (как и в § 24) нормировать падающую волну условием $w^*w = 1$,

$$d\sigma = w'^* w'\, do.$$

Введем оператор рассеяния $\hat{f}$ согласно определению

$$w' = \hat{f} w. \tag{37,2}$$

Ввиду двухкомпонентности величин w, w' определенный таким образом оператор аналогичен операторной амплитуде рассеяния, фигурирующей в нерелятивистской теории рассеяния с учетом спина (III, § 140). Поэтому непосредственно переносятся сюда полученные там формулы, выражающие оператор через фазовые сдвиги волновых функций в рассеивающем поле. Надо лишь произвести переобозначение этих фаз, выразив введенные в III, § 140 сдвиги δ_l^+ и δ_l^- через фазовый сдвиг $\delta_\varkappa$, фигурирующий в релятивистской формуле (35,7). Напомним, что фазы δ_l^+ и δ_l^- относились к состояниям с орбитальным моментом l и полным моментом $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$. Согласно определению (35,3) $\varkappa = -l - 1$ при $j = l + 1/2$ и $\varkappa = l$ при $j = l - 1/2$. Поэтому мы должны переобозначить

$$\delta_l^+ \to \delta_{-(l+1)}, \quad \delta_l^- \to \delta_l$$

(и помнить, что индекс у δ задает теперь значение числа $\varkappa$!). Таким образом, получим следующие формулы:

$$\hat{f} = A + B\boldsymbol{\nu\sigma}, \tag{37,3}$$

$$A = \frac{1}{2ip} \sum_{l=0}^{\infty} \left[(l+1)\left(e^{2i\delta_{-l-1}} - 1\right) + l\left(e^{2i\delta_l} - 1\right)\right] P_l(\cos\theta), \tag{37,4}$$

$$B = \frac{1}{2p} \sum_{l=1}^{\infty} \left(e^{2i\delta_{-l-1}} - e^{2i\delta_l}\right) P_l^1(\cos\theta), \tag{37,5}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении $[\mathbf{nn}']$.

Поскольку w — спинорная волновая функция в системе покоя, то и поляризационные свойства рассеяния описываются с помощью $\hat{f}$ теми же формулами, что и в III, § 140.

В случае кулонова поля оказывается возможным выразить обе функции $A(\theta)$ и $B(\theta)$ через одну. Укажем вкратце ход соответствующих вычислений[1]).

---

[1]) *Gluckstern R. L., Lin S. R.*//J. Math. Phys. — 1964. — Vol. 5. — P. 1594.

Для кулонова поля фазы $\delta_\varkappa$ даются формулой (36,18), которую представим в виде

$$
\begin{gathered}
e^{2i\delta_\varkappa} = -\left(\varkappa - i\frac{Ze^2m}{p}\right)\frac{\varkappa}{|\varkappa|}C_\varkappa, \\
C_\varkappa = -\frac{\Gamma(\gamma - i\nu)}{\Gamma(\gamma + 1 + i\nu)}e^{i\pi(|\varkappa| - \gamma)}
\end{gathered}
\tag{37,6}
$$

(замечаем, что $e^{i\pi l} = e^{i\pi\varkappa}$ при $\varkappa > 0$ и $e^{i\pi l} = -e^{i\pi\varkappa}$ при $\varkappa < 0$). С помощью введенных таким образом величин ряды (37,4—5) могут быть представлены в виде

$$
\begin{gathered}
A(\theta) = \frac{1}{p}G(\theta) - i\frac{Ze^2m}{p^2}F(\theta), \\
B(\theta) = -\frac{i}{p}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot G(\theta) + \frac{Ze^2m}{p^2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cdot F(\theta),
\end{gathered}
\tag{37,7}
$$

где

$$
G(\theta) = \frac{i}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l^2 C_l (P_l + P_{l-1}), \quad F(\theta) = \frac{i}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l C_l (P_l - P_{l-1}). \tag{37,8}
$$

При преобразовании ряда $B(\theta)$ использованы следующие рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра:

$$
P_l^1 + P_{l-1}^1 = -\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cdot l(P_l - P_{l-1}), \tag{37,9}
$$

$$
P_l^1 - P_{l-1}^1 = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot l(P_l + P_{l-1}). \tag{37,10}
$$

С другой стороны, в силу тождества

$$
(1 + \cos\theta)\frac{d}{d\cos\theta}[P_l(\cos\theta) - P_{l-1}(\cos\theta)] = \\
= l[P_l(\cos\theta) + P_{l-1}(\cos\theta)] \tag{37,11}
$$

функции $F(\theta)$ и $G(\theta)$ связаны друг с другом соотношением

$$
G = (1 - \cos\theta)\frac{dF}{d\cos\theta} = -\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\frac{dF}{d\theta}. \tag{37,12}
$$

Тем самым $A(\theta)$ и $B(\theta)$ оказываются выраженными через одну функцию $F(\theta)$ [1]).

---

[1]) Функция $F(\theta)$ не выражается в замкнутом виде через элементарные функции. Однако ее можно записать в виде определенного двойного интеграла — см. указанную выше статью.