Для кулонова поля в ультрарелятивистском случае фазы $\delta_\varkappa$ не зависят от энергии, как это видно из (36,19) [1]). Поэтому в чисто кулоновом поле сечение рассеяния при $\varepsilon \gg m$ имеет вид

$$d\sigma = \frac{\tau(\theta)}{\varepsilon^2}\, do, \tag{38,7}$$

где τ — функция только от угла.

§ 39. Система волновых функций непрерывного спектра для рассеяния в кулоновом поле

В дальнейшем (см. § 95, 96) будут рассмотрены различные неупругие процессы, происходящие при рассеянии ультрарелятивистских электронов в поле тяжелого ($Z\alpha \sim 1$) ядра. Для вычисления соответствующих матричных элементов нам понадобятся волновые функции, асимптотическая (при $r \to \infty$) форма которых складывается из плоской и сферической волн.

Мы увидим, что в ультрарелятивистском случае (энергия электрона $\varepsilon \gg m$) основную роль в рассеянии играют передачи импульса (от электрона ядру) $q = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}| \sim m$. Этим значениям q отвечают «прицельные расстояния» $\rho \sim 1/q \sim 1/m$, причем электрон отклоняется на углы [2])

$$\theta \sim \frac{q}{p} \sim \frac{m}{\varepsilon}. \tag{39,1}$$

В терминах координат r (расстояние от центра) и $z = r\cos\theta$ это означает область

$$\rho \equiv r\sin\theta \sim 1/m, \quad p(r-z) = pr(1-\cos\theta) \sim 1. \tag{39,2}$$

При этом $r \sim \varepsilon/m^2$, т. е. мы имеем дело с областью больших расстояний.

Напишем уравнение Дирака в виде

$$(\varepsilon - U - m\beta + i\boldsymbol{\alpha}\nabla)\psi = 0, \qquad U = -Z\alpha/r. \tag{39,3}$$

Преобразуем его в уравнение второго порядка, для чего применим к (39,3) оператор $(\varepsilon - U + m\beta - i\boldsymbol{\alpha}\nabla)$:

$$(\Delta + p^2 - 2\varepsilon U)\psi = (-i\boldsymbol{\alpha}\nabla U - U^2)\psi. \tag{39,4}$$

Поскольку в рассматриваемой области $r \gg Z\alpha/\varepsilon$, то $U \ll \varepsilon$. В первом приближении можно пренебречь в (39,4) правой

---

[1]) Это видно и непосредственно из уравнений (38,1), поскольку для кулонова поля заменой $\mathbf{r} \to \mathbf{r}'/\varepsilon$ энергию ε можно вообще устранить из уравнений.

[2]) В этом параграфе p обозначает $|\mathbf{p}|$.

стороной. Остающееся уравнение

$$\left(\Delta + p^2 + \frac{2\varepsilon Z\alpha}{r}\right)\psi = 0 \qquad (39,5)$$

по форме совпадает с нерелятивистским уравнением Шредингера в кулоновом поле

$$\left(\frac{1}{2m}\Delta + \frac{p^2}{2m} + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi = 0, \qquad (39,5а)$$

отличаясь от него лишь очевидным изменением обозначения параметров (в «потенциальной энергии» — лишний множитель ε/m). Поэтому мы можем сразу написать его решение, имеющее требуемый асимптотический вид (см. III, § 136).

Так, волновая функция, содержащая асимптотически плоскую ($\infty\, e^{i\mathbf{pr}}$) и расходящуюся сферическую волны, имеет вид

$$\psi_{\varepsilon p}^{(+)} = C\frac{u_{\varepsilon p}}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{i\mathbf{pr}}F\left(\frac{iZ\alpha\varepsilon}{p},\ 1,\ i(pr - \mathbf{pr})\right),$$
$$C = e^{\pi Z\alpha\varepsilon/2p}\Gamma\left(1 - i\frac{Z\alpha\varepsilon}{p}\right), \qquad (39,6)$$

где F — вырожденная гипергеометрическая функция, а $u_{\varepsilon p}$ — постоянная биспинорная амплитуда плоской волны, нормированная принятым нами условием (23,4)

$$\bar{u}_{\varepsilon p}u_{\varepsilon p} = 2m. \qquad (39,7)$$

Волновая функция (39,6) нормирована таким образом, что плоская волна в ее асимптотическом выражении имеет обычный вид

$$\frac{u_{\varepsilon p}}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{i\mathbf{pr}},$$

отвечающий одной частице в единичном объеме. Поскольку в ультрарелятивистском случае $p \approx \varepsilon$, в (39,6) можно положить $Z\alpha\varepsilon/p \approx Z\alpha$:

$$\psi_{\varepsilon p}^{(+)} = C\frac{u_{\varepsilon p}}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{i\mathbf{pr}}F(iZ\alpha,\ 1,\ i(pr - \mathbf{pr})), \qquad (39,8)$$
$$C = e^{Z\alpha\pi/2}\Gamma(1 - iZ\alpha).$$

Обратим внимание на то, что хотя мы рассматриваем расстояния настолько большие, что $pr \gg 1$, заменить в (39,8) гипергеометрическую функцию ее асимптотическим выражением нельзя: аргументом функции F является не pr, а величина $pr(1-\cos\theta)$, не предполагающаяся нами большой [1]).

[1]) В III, § 135 мы интересовались сколь угодно большими r, и поэтому такая замена была возможна для любых углов θ.

В применениях оказывается необходимым также следующее приближение в ψ, которое имеет спинорную структуру, отличную от структуры (39,8) (сводящейся к множителю $u_{\varepsilon p}$). Для его вычисления пишем ψ в виде

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{i\mathbf{pr}} (u_{\varepsilon p} F + \varphi).$$

В правой стороне уравнения (39,4) сохраняем теперь член с первой степенью U и для функции φ получаем уравнение

$$(\Delta + 2i\mathbf{p}\nabla - 2\varepsilon U)\,\varphi = -iu_{\varepsilon p}(\boldsymbol{\alpha}\nabla U)\,F. \tag{39,9}$$

Его решение можно найти, заметив, что функция F удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + 2i\mathbf{p}\nabla - 2\varepsilon U)\,F = 0$$

(в чем можно убедиться, подставив (39,6) в (39,5)). Применив к этому уравнению операцию ∇, получим

$$(\Delta + 2i\mathbf{p}\nabla - 2\varepsilon U)\,\nabla F = 2\varepsilon F \nabla U.$$

Сравнив с уравнением (39,9), найдем

$$\varphi = -\frac{i}{2\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha}\nabla)\,u_{\varepsilon p} F.$$

Выпишем окончательное выражение для $\psi^{(+)}$ и для такой же функции $\psi^{(-)}$, содержащей в своем асимптотическом выражении сходящуюся сферическую волну:

$$\psi^{(+)}_{\varepsilon p} = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{i\mathbf{pr}} \left(1 - \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right) F\,(iZ\alpha,\ 1,\ i\,(pr - \mathbf{pr}))\,u_{\varepsilon p},$$

$$\psi^{(-)}_{\varepsilon p} = \frac{C^*}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{i\mathbf{pr}} \left(1 - \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right) F\,(-iZ\alpha,\ 1,\ -i\,(pr + \mathbf{pr}))\,u_{\varepsilon p}, \tag{39,10}$$

$$C = e^{\pi Z\alpha/2}\,\Gamma\,(1 - iZ\alpha)$$

(*W. H. Furry*, 1934). Выпишем также аналогичные функции $(\psi_{-\varepsilon -p})$ с «отрицательной частотой», которые понадобятся при рассмотрении процессов с участием позитронов. Их можно получить из функций $\psi_{\varepsilon p}$ заменой $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, $\varepsilon \to -\varepsilon$, причем $p = |\mathbf{p}|$ не меняется (в силу последнего обстоятельства параметр $iZ\alpha$ гипергеометрической функции меняет знак, как это видно из первоначального выражения (39,6), в котором этот параметр фигурирует в виде $iZ\alpha\varepsilon/p$). Таким образом, получим

$$\psi^{(+)}_{-\varepsilon -p} = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-i\mathbf{pr}} \left(1 + \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right) F\,(-iZ\alpha,\ 1,\ i\,(pr + \mathbf{pr}))\,u_{-\varepsilon -p},$$

$$\psi^{(-)}_{-\varepsilon -p} = \frac{C^*}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-i\mathbf{pr}} \left(1 + \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right) F\,(iZ\alpha,\ 1,\ -i\,(pr - \mathbf{pr}))\,u_{-\varepsilon -p}, \tag{39,11}$$

$$C = e^{-\pi Z\alpha/2}\,\Gamma\,(1 + iZ\alpha).$$

По поводу произведенных вычислений надо еще сделать следующее замечание. Поставленное нами асимптотическое условие само по себе отнюдь не достаточно для однозначного выбора решения волнового уравнения (это ясно хотя бы из того, что всегда можно добавить к ψ, не нарушая этого условия, любую кулонову расходящуюся сферическую волну). Написав решение уравнения (39,5) в виде (39,6), мы тем самым молчаливо подразумевали выбор решения, конечного при $r=0$. Такое требование было необходимым в III, § 135, 136, где рассматривались решения точного уравнения Шредингера, справедливые во всем пространстве [1]). В данном же случае уравнение (39,5) относится лишь к большим расстояниям, и потому произведенный отбор решения нуждается в дополнительном обосновании.

Оно дается тем фактом, что большим «прицельным расстояниям» $\rho=r\sin\theta$ соответствуют большие орбитальные моменты l и малые углы рассеяния θ: при $\rho\sim 1/m$ имеем

$$l\sim\rho p\sim\rho\varepsilon\sim\varepsilon/m\gg 1,$$

а угол θ можно оценить квазиклассическим способом:

$$\theta\sim\frac{1}{p}\int\frac{dU}{dr}dt\sim\frac{U'(\rho)\rho}{p}\sim\frac{m}{\varepsilon}\ll 1.$$

Это значит, что в разложении ψ по сферическим волнам будут фигурировать (в рассматриваемой области r и θ) в основном волны с указанными большими значениями l. Но сферическая волна с большим l заведомо убывает до малых значений при приближении к началу координат на «классически недостижимые» (благодаря центробежному барьеру) расстояния $r\ll l/\varepsilon$. Поэтому, если производить «сшивание» решения уравнения (39,5) с решением точного уравнения (39,4) на малых расстояниях при $r\sim r_1$, где $l/\varepsilon\gg r_1\gg Z\alpha/\varepsilon$, то граничное условие для решения уравнения (39,5) будет заключаться в требовании его малости, чем и оправдывается сделанный нами выбор.

Задача

Для кулонова поля притяжения с $Z\alpha\ll 1$ найти поправку (относительного порядка $Z\alpha$) к нерелятивистской волновой функции дискретного спектра.

Решение. Скорость электрона в связанном состоянии $v\sim Z\alpha$, так что при $Z\alpha\ll 1$ в нулевом приближении волновая функция — нерелятивистская, т. е.

$$\psi=u\psi_{\text{нр}},$$

[1]) В изложенном в III, § 135 ходе решения это условие было обеспечено выбором частного интеграла вида (135,1) вместо общей суммы интегралов с различными значениями β_1, β_2.

где $\psi_{\text{нр}}$ — удовлетворяющая нерелятивистскому уравнению Шредингера функция, u — биспинор вида $u = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$, где w — спинор, описывающий поляризационное состояние электрона. В следующем приближении пишем: $\psi = u\psi_{\text{нр}} + \psi^{(1)}$ и, подставляя в (39,4), находим для $\psi^{(1)}$ уравнение

$$\left(\frac{1}{2m}\Delta - |\varepsilon_n| + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi^{(1)} = i\,\frac{Z\alpha}{2m}\left(\nabla\frac{1}{r}\right)(\alpha u)\,\psi_{\text{нр}},$$

где ε_n — нерелятивистский дискретный уровень энергии. Здесь опущены члены относительного порядка $(Z\alpha)^2$ (следует учитывать, что в нерелятивистском случае основные расстояния — порядка боровского радиуса: $r \sim 1/mZ\alpha$). Решение этого уравнения: $\psi^{(1)} = -\frac{i}{2m}\alpha u \nabla\psi_{\text{нр}}$, так что

$$\psi = \left(1 - \frac{i}{2m}\alpha\nabla\right)u\psi_{\text{нр}}.$$

§ 40. Электрон в поле плоской электромагнитной волны

Уравнение Дирака может быть решено точно для электрона, движущегося в поле плоской электромагнитной волны (*Д. М. Волков*, 1937).

Поле плоской волны с волновым 4-вектором k ($k^2 = 0$) зависит от 4-координат лишь в комбинации $\varphi = kx$, так что 4-потенциал

$$A^\mu = A^\mu(\varphi), \tag{40,1}$$

причем он удовлетворяет условию калибровки Лоренца

$$\partial_\mu A^\mu = k_\mu A^{\mu\prime} = 0$$

(штрих означает дифференцирование по φ). Поскольку постоянный член в A несуществен, в этом условии можно опустить штрих и записать его в виде

$$kA = 0. \tag{40,2}$$

Исходим из уравнения второго порядка (32,6), в котором тензор поля

$$F_{\mu\nu} = k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu. \tag{40,3}$$

При раскрытии же квадрата $(i\partial - eA)^2$ надо учесть, что в силу (40,2) $\partial_\mu(A^\mu\psi) = A^\mu\partial_\mu\psi$. В результате получим уравнение

$$[-\partial^2 - 2ie(A\partial) + e^2A^2 - m^2 - ie(\gamma k)(\gamma A')]\,\psi = 0 \tag{40,4}$$

($\partial^2 = \partial_\mu\partial^\mu$).

Ищем решение этого уравнения в виде

$$\psi = e^{-ipx}F(\varphi), \tag{40,5}$$