где $\psi_{\text{нр}}$ — удовлетворяющая нерелятивистскому уравнению Шредингера функция, u — биспинор вида $u = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$, где w — спинор, описывающий поляризационное состояние электрона. В следующем приближении пишем: $\psi = u\psi_{\text{нр}} + \psi^{(1)}$ и, подставляя в (39,4), находим для $\psi^{(1)}$ уравнение

$$\left(\frac{1}{2m}\Delta - |\varepsilon_n| + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi^{(1)} = i\frac{Z\alpha}{2m}\left(\nabla\frac{1}{r}\right)(\alpha u)\,\psi_{\text{нр}},$$

где ε_n — нерелятивистский дискретный уровень энергии. Здесь опущены члены относительного порядка $(Z\alpha)^2$ (следует учитывать, что в нерелятивистском случае основные расстояния — порядка боровского радиуса: $r \sim 1/mZ\alpha$). Решение этого уравнения: $\psi^{(1)} = -\frac{i}{2m}\alpha u\nabla\psi_{\text{нр}}$, так что

$$\psi = \left(1 - \frac{i}{2m}\alpha\nabla\right)u\psi_{\text{нр}}.$$

§ 40. Электрон в поле плоской электромагнитной волны

Уравнение Дирака может быть решено точно для электрона, движущегося в поле плоской электромагнитной волны (*Д. М. Волков*, 1937).

Поле плоской волны с волновым 4-вектором k ($k^2 = 0$) зависит от 4-координат лишь в комбинации $\varphi = kx$, так что 4-потенциал

$$A^\mu = A^\mu(\varphi), \tag{40,1}$$

причем он удовлетворяет условию калибровки Лоренца

$$\partial_\mu A^\mu = k_\mu A^{\mu\prime} = 0$$

(штрих означает дифференцирование по φ). Поскольку постоянный член в A несуществен, в этом условии можно опустить штрих и записать его в виде

$$kA = 0. \tag{40,2}$$

Исходим из уравнения второго порядка (32,6), в котором тензор поля

$$F_{\mu\nu} = k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu. \tag{40,3}$$

При раскрытии же квадрата $(i\partial - eA)^2$ надо учесть, что в силу (40,2) $\partial_\mu(A^\mu\psi) = A^\mu\partial_\mu\psi$. В результате получим уравнение

$$[-\partial^2 - 2ie(A\partial) + e^2A^2 - m^2 - ie(\gamma k)(\gamma A')]\psi = 0 \tag{40,4}$$

($\partial^2 = \partial_\mu\partial^\mu$).

Ищем решение этого уравнения в виде

$$\psi = e^{-ipx}F(\varphi), \tag{40,5}$$

где p — постоянный 4-вектор. Прибавление к p любого вектора вида $\mathrm{const}\cdot k$ не меняет такого вида функции ψ (требуется лишь соответствующее переобозначение функции $F(\varphi)$). Поэтому можно без ограничения общности наложить на p одно дополнительное условие. Пусть

$$p^2 = m^2. \tag{40,6}$$

Тогда при выключении поля квантовые числа p^μ переходят в компоненты 4-импульса свободной частицы. Смысл компонент 4-вектора p при наличии поля более нагляден в специальной системе отсчета, выбранной так, чтобы было $A_0 = 0$. Пусть в этой системе вектор $\mathbf{A}$ направлен по оси x^1, а $\mathbf{k}$ — по оси x^3 (т. е. электрическое поле волны направлено по x^1, магнитное — по x^2, а сама волна распространяется вдоль оси x^3). Тогда (40,5) будет собственной функцией операторов

$$\hat{p}_1 = i\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \hat{p}_2 = i\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \hat{p}_0 - \hat{p}_3 = i\left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$

с собственными значениями p_1, p_2, $p_0 - p_3$ (сами же эти операторы, как легко видеть, коммутативны с гамильтонианом уравнения Дирака). Таким образом, в данной системе отсчета p^1, p^2 — компоненты обобщенного импульса вдоль осей x^1, x^2, а $p^0 - p^3$ — разность между полной энергией и компонентой обобщенного импульса вдоль оси x^3.

При подстановке (40,5) в (40,4) замечаем, что

$$\partial^\mu F = k^\mu F', \qquad \partial_\mu \partial^\mu F = k^2 F'' = 0,$$

и находим для $F(\varphi)$ уравнение

$$2i(kp)F' + [-2e(pA) + e^2A^2 - ie(\gamma k)(\gamma A')]F = 0.$$

Формальное решение этого уравнения

$$F = \exp\left\{-i\int\limits_0^{kx}\left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]d\varphi + \frac{e(\gamma k)(\gamma A)}{2(kp)}\right\}\frac{u}{\sqrt{2p_0}},$$

где $u/\sqrt{2p_0}$ — произвольный постоянный биспинор (о форме его записи см. ниже).

Все степени $(\gamma k)(\gamma A)$ выше первой равны нулю, поскольку

$$(\gamma k)(\gamma A)(\gamma k)(\gamma A) =$$
$$= -(\gamma k)(\gamma k)(\gamma A)(\gamma A) + 2(kA)(\gamma k)(\gamma A) = -k^2A^2 = 0.$$

Поэтому можно заменить

$$\exp\frac{e(\gamma k)(\gamma A)}{2(kp)} = 1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma k)(\gamma A),$$

так что ψ принимает вид

$$\psi_p = \left[1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma k)(\gamma A)\right] \frac{u}{\sqrt{2p_0}} e^{iS}, \tag{40,7}$$

где[1])

$$S = -px - \int_0^{kx} \frac{e}{(kp)}\left[(pA) - \frac{e}{2}A^2\right] d\varphi. \tag{40,8}$$

Для выяснения условий, налагаемых на постоянный биспинор u, следует считать, что волна бесконечно медленно «включается», начиная от $t = -\infty$. Тогда $A \to 0$ при $kx \to -\infty$ и ψ должно переходить в решение свободного уравнения Дирака. Для этого $u = u(p)$ должно удовлетворять уравнению

$$(\gamma p - m) u = 0. \tag{40,9}$$

Этим условием отбрасываются «лишние» решения уравнения второго порядка. Так как u не зависит от времени, это условие остается в силе и при конечных kx. Таким образом, $u(p)$ совпадает с биспинорной амплитудой свободной плоской волны; будем предполагать ее нормированной тем же условием (23,4): $\bar{u}u = 2m$.

Изложенные рассуждения позволяют также сразу выяснить нормировку волновых функций (40,7). Бесконечно медленное включение поля не меняет нормировочного интеграла. Отсюда следует, что функции (40,7) удовлетворяют тому же условию нормировки

$$\int \psi^*_{p'}\psi_p d^3x = \int \bar{\psi}_{p'}\gamma^0\psi_p d^3x = (2\pi)^3\,\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \tag{40,10}$$

что и свободные плоские волны.

Найдем плотность тока, отвечающую функциям (40,7). Заметив, что

$$\bar{\psi}_p = \frac{\bar{u}}{\sqrt{2p_0}}\left[1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma A)(\gamma k)\right] e^{-iS},$$

прямым перемножением получим

$$j^\mu = \bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_p = \frac{1}{p_0}\left\{p^\mu - eA^\mu + k^\mu\left(\frac{e(pA)}{(kp)} - \frac{e^2A^2}{2(kp)}\right)\right\}. \tag{40,11}$$

Если $A^\mu(\varphi)$ периодические функции и их среднее (по времени) значение обращается в нуль, то среднее значение плотности тока

$$\overline{j^\mu} = \frac{1}{p_0}\left(p^\mu - \frac{e^2}{2(kp)}\overline{A^2}k^\mu\right). \tag{40,12}$$

[1]) Выражение для S совпадает с классическим действием для частицы, движущейся в поле волны — ср. II, § 47, задача 2.

Найдем также плотность кинетического импульса в состоянии ψ_p. Оператор кинетического импульса есть разность $\hat{p} - eA = i\partial - eA$. Прямым вычислением найдем

$$\psi_p^* (\hat{p}^\mu - eA^\mu) \psi_p = \bar{\psi}_p \gamma^0 (\hat{p}^\mu - eA^\mu) \psi_p =$$
$$= p^\mu - eA^\mu + k^\mu \left(\frac{e(pA)}{(kp)} - \frac{e^2 A^2}{2(kp)} \right) + k^\mu \frac{ie}{8(kp) p_0} F_{\lambda\nu} (u^* \sigma^{\lambda\nu} u). \tag{40,13}$$

Среднее по времени значение этого 4-вектора, которое обозначим q^μ, есть

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2 \overline{A^2}}{2(kp)} k^\mu. \tag{40,14}$$

Его квадрат:

$$q^2 = m_*^2, \qquad m_* = m \sqrt{1 - \frac{e^2}{m^2} \overline{A^2}}\,; \tag{40,15}$$

m_* играет роль «эффективной массы» электрона в поле. Сравнив (40,14) и (40,12), мы видим, что

$$\overline{j^\mu} = q^\mu / p_0. \tag{40,16}$$

Отметим также, что условие нормировки (40,10), выраженное с помощью вектора $\mathbf{q}$, имеет вид

$$\int \psi_{p'}^* \psi_p d^3x = (2\pi)^3 \frac{q_0}{p_0} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \tag{40,17}$$

(переход от (40,10) к (40,17) проще всего произвести в указанной выше специальной системе отсчета).

§ 41. Движение спина во внешнем поле

Переход к квазиклассическому приближению в уравнении Дирака производится так же, как и в нерелятивистской теории. В уравнение второго порядка (32,7а) подставляем ψ в виде[1])

$$\psi = u e^{iS/\hbar},$$

где S — скаляр, u — медленно меняющийся биспинор. При этом предполагается выполненным обычное условие квазиклассичности: импульс частицы должен мало меняться на расстояниях порядка длины волны $\hbar/|\mathbf{p}|$.

В нулевом приближении по $\hbar$ получается обычное классическое релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби для действия S. При этом все члены, содержащие спин (и пропорциональные $\hbar$), выпадают из уравнений движения. Спин появился

[1]) Пользуемся сначала обычными единицами.