Найдем также плотность кинетического импульса в состоянии ψ_p. Оператор кинетического импульса есть разность $\hat{p} - eA = i\partial - eA$. Прямым вычислением найдем

$$\psi_p^* (\hat{p}^\mu - eA^\mu)\psi_p = \bar{\psi}_p \gamma^0 (\hat{p}^\mu - eA^\mu)\psi_p =$$
$$= p^\mu - eA^\mu + k^\mu \left(\frac{e(pA)}{(kp)} - \frac{e^2 A^2}{2(kp)}\right) + k^\mu \frac{ie}{8(kp)\,p_0} F_{\lambda\nu} \left(u^* \sigma^{\lambda\nu} u\right). \tag{40,13}$$

Среднее по времени значение этого 4-вектора, которое обозначим q^μ, есть

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2 \overline{A^2}}{2(kp)} k^\mu. \tag{40,14}$$

Его квадрат:

$$q^2 = m_*^2, \qquad m_* = m\sqrt{1 - \frac{e^2}{m^2}\overline{A^2}}\,; \tag{40,15}$$

m_* играет роль «эффективной массы» электрона в поле. Сравнив (40,14) и (40,12), мы видим, что

$$\overline{j^\mu} = q^\mu / p_0. \tag{40,16}$$

Отметим также, что условие нормировки (40,10), выраженное с помощью вектора $\mathbf{q}$, имеет вид

$$\int \psi_{p'}^* \psi_p d^3x = (2\pi)^3 \frac{q_0}{p_0} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \tag{40,17}$$

(переход от (40,10) к (40,17) проще всего произвести в указанной выше специальной системе отсчета).

§ 41. Движение спина во внешнем поле

Переход к квазиклассическому приближению в уравнении Дирака производится так же, как и в нерелятивистской теории. В уравнение второго порядка (32,7а) подставляем ψ в виде[1])

$$\psi = u e^{iS/\hbar},$$

где S — скаляр, u — медленно меняющийся биспинор. При этом предполагается выполненным обычное условие квазиклассичности: импульс частицы должен мало меняться на расстояниях порядка длины волны $\hbar/|\mathbf{p}|$.

В нулевом приближении по $\hbar$ получается обычное классическое релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби для действия S. При этом все члены, содержащие спин (и пропорциональные $\hbar$), выпадают из уравнений движения. Спин появился

[1]) Пользуемся сначала обычными единицами.

бы лишь в следующем приближении по $\hbar$. Другими словами, влияние магнитного момента электрона на его движение — всегда того же порядка величины, что и квантовые поправки. Это вполне естественно ввиду чисто квантовой природы спинового момента, который пропорционален $\hbar$.

В связи с такой ситуацией приобретает смысл постановка задачи о поведении спина электрона, совершающего заданное квазиклассическое движение во внешнем поле. Решение этой задачи содержится в следующем приближении по $\hbar$ в уравнении Дирака. Мы применим, однако, другой способ, более наглядный и не связанный непосредственно с уравнением Дирака. Он обладает тем преимуществом, что позволяет рассматривать движение любой частицы, в том числе обладающей «аномальным» гиромагнитным отношением, не описываемым уравнением Дирака.

Наша цель состоит в установлении «уравнения движения» для спина при произвольном (заданном) движении частицы. Начнем с нерелятивистского случая.

Нерелятивистский гамильтониан частицы во внешнем поле

$$\hat{H} = \hat{H}' - \mu\sigma\mathbf{H}, \tag{41,1}$$

где в $\hat{H}'$ включены все члены, не содержащие спина (см. III, § 111); μ — магнитный момент частицы. Этот вид гамильтониана не связан с определенным сортом частиц. Для электронов $\mu = e\hbar/2mc$ (заряд электрона $e = -|e|$!), а у нуклонов μ содержит еще и «аномальную» часть [1])

$$\mu' = \mu - \frac{e\hbar}{2mc}. \tag{41,2}$$

Согласно общим правилам квантовой механики операторное уравнение движения спина получается из формулы

$$\hat{\dot{\mathbf{s}}} = \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}\hat{H}) = \frac{i}{2\hbar}(\hat{H}\sigma - \sigma\hat{H}). \tag{41,3}$$

Подставив сюда (41,1), найдем

$$\hat{\dot{s}}_i = -\frac{i\mu}{2\hbar}H_k(\sigma_k\sigma_i - \sigma_i\sigma_k) = -\frac{\mu}{\hbar}e_{ikl}H_k\sigma_l,$$

или

$$\hat{\dot{\mathbf{s}}} = \frac{2\mu}{\hbar}[\hat{\mathbf{s}}\mathbf{H}]. \tag{41,4}$$

Усредним это операторное равенство по состоянию квазиклассического волнового пакета, движущегося вдоль заданной

[1]) С учетом радиационных поправок очень малая «аномальная часть» содержится также и в магнитном моменте электрона.

траектории. Эта операция сводится к замене оператора спина его средним значением $\bar{\mathbf{s}}$, а вектора $\mathbf{H}$ — функцией $\mathbf{H}(t)$, представляющей собой изменение магнитного поля в точке нахождения частицы (волнового пакета) при ее заданном движении вдоль траектории. В нерелятивистском приближении, т. е. в рамках уравнения Паули, $\hat{\mathbf{s}} = \sigma/2$ есть оператор спина частицы в ее системе покоя, среднее значение которого мы обозначили в § 29 как $\zeta/2$. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{2\mu}{\hbar}[\zeta\mathbf{H}(t)]. \tag{41,5}$$

В таком виде это уравнение имеет, по существу, чисто классический характер. Оно означает, что вектор магнитного момента прецессирует вокруг направления поля с угловой скоростью $-2\mu\mathbf{H}/\hbar$, оставаясь неизменным по величине [1]).

В том же нерелятивистском случае скорость $\mathbf{v}$ частицы меняется согласно уравнению

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{mc}[\mathbf{v}\mathbf{H}],$$

т. е. вектор $\mathbf{v}$ вращается вокруг направления $\mathbf{H}$ с угловой скоростью $-e\mathbf{H}/mc$. Если $\mu' = 0$, то $\mu = e\hbar/2mc$, и эта угловая скорость совпадает со скоростью $-2\mu\mathbf{H}/\hbar$ вращения вектора ζ; другими словами, вектор поляризации сохраняет постоянный угол с направлением движения (мы увидим ниже, что этот результат остается в силе и в релятивистском случае).

Произведем теперь релятивистское обобщение уравнения (41,5). Для ковариантного описания поляризации надо при этом пользоваться введенным в § 29 4-вектором a, а уравнение движения спина должно определять производную $da/d\tau$ по собственному времени τ [2]).

Возможный вид этого уравнения может быть установлен уже из соображений релятивистской инвариантности, если учесть, что его правая часть должна быть линейна и однородна по тензору электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ и по 4-вектору a^μ, а, помимо них, может содержать только 4-скорость $u^\mu = p^\mu/m$. Этим

---

[1]) Классически уравнение (41,5) получается непосредственно из равенства

$$d\mathbf{M}/dt = [\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}],$$

где $\mathbf{M}$ — момент импульса системы, $\boldsymbol{\mu}$ — ее магнитный момент, $[\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}]$ — действующий на систему момент сил. Положив $\mathbf{M} = \frac{1}{2}\hbar\zeta$, $\boldsymbol{\mu} = \frac{\mu}{2s}\zeta = \mu\zeta$, получим (41,5).

[2]) Ниже снова полагаем $c = 1$, $\hbar = 1$.

условиям удовлетворяет лишь уравнение вида

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = \alpha F^{\mu\nu} a_\nu + \beta u^\mu F^{\nu\lambda} u_\nu a_\lambda, \tag{41,6}$$

где α, β — постоянные коэффициенты. Легко видеть, что в силу условия $a_\mu u^\mu = 0$ и антисимметричности тензора $F^{\mu\nu}$ (так что $F^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 0$) никаких других выражений требуемого вида составить нельзя.

При $v \to 0$ это уравнение должно совпадать с (41,5). Положив $a^\mu = (0, \zeta)$, $u^\mu = (1, 0)$, $\tau = t$, получим

$$\frac{d\zeta}{dt} = \alpha [\zeta \mathbf{H}].$$

Сравнив с (41,5), найдем: $\alpha = 2\mu$.

Для определения β учтем, что $a^\mu u_\mu = 0$. Продифференцировав это равенство по τ и воспользовавшись классическим уравнением движения заряда в поле

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu} u_\nu$$

(см. II, § 23), получим

$$u_\mu \frac{da^\mu}{d\tau} = -a_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = -a_\mu \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\nu = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\mu a_\nu.$$

Поэтому, умножив уравнение (41,6) с обеих сторон на u_μ, учтя равенство $u_\mu u^\mu = 1$ и сократив общий множитель $F^{\mu\nu} u_\mu a_\nu$, получим

$$\beta = -2\left(\mu - \frac{e}{2m}\right) = -2\mu'.$$

Таким образом, находим окончательно релятивистское уравнение движения спина

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = 2\mu F^{\mu\nu} a_\nu - 2\mu' u^\mu F^{\nu\lambda} u_\nu a_\lambda \tag{41,7}$$

(*V. Bargmann, L. Michel, V. Telegdi*, 1959)[1]).

Перейдем от 4-вектора a к величине ζ, непосредственно характеризующей поляризацию частицы в ее «мгновенной» системе покоя; связь между a и ζ дается формулами (29,7—9). Сразу же отметим, что из (41,7) автоматически следует, что $a_\mu da^\mu / d\tau = 0$, т. е. $a_\mu a^\mu = \text{const}$. Поскольку $a_\mu a^\mu = -\zeta^2$, это означает естественный результат: при движении частицы ее поляризация ζ остается неизменной по величине.

[1]) В другом виде подобное уравнение было впервые найдено *Я. И. Френкелем* (1926).

Уравнение, определяющее изменение направления поляризации, получим, перейдя в (41,7) к трехмерным обозначениям. Раскрыв пространственные компоненты этого уравнения, найдем

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{2\mu m}{\varepsilon}[\mathbf{aH}] + \frac{2\mu m}{\varepsilon}(\mathbf{av})\mathbf{E} - \frac{2\mu'\varepsilon}{m}\mathbf{v}(\mathbf{aE}) + \\ + \frac{2\mu'\varepsilon}{m}\mathbf{v}(\mathbf{v}[\mathbf{aH}]) + \frac{2\mu'\varepsilon}{m}\mathbf{v}(\mathbf{av})(\mathbf{vE}).$$

Сюда надо подставить (29,9), учитывая при дифференцировании равенства $\mathbf{p} = \varepsilon\mathbf{v}$, $\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ и уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{vH}], \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = e(\mathbf{vE}). \qquad (41,8)$$

Элементарное, хотя и довольно длинное вычисление приводит к следующему уравнению [1]:

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{2\mu m + 2\mu'(\varepsilon - m)}{\varepsilon}[\boldsymbol{\zeta}\mathbf{H}] + \frac{2\mu'\varepsilon}{\varepsilon + m}(\mathbf{vH})[\mathbf{v}\boldsymbol{\zeta}] + \frac{2\mu m + 2\mu'\varepsilon}{\varepsilon + m}[\boldsymbol{\zeta}[\mathbf{Ev}]]. \qquad (41,9)$$

Особый интерес представляет не столько изменение абсолютного направления поляризации в пространстве, сколько его изменение по отношению к направлению движения. Представим $\boldsymbol{\zeta}$ в виде

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{n}\zeta_\parallel + \boldsymbol{\zeta}_\perp \qquad (41,10)$$

(где $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$) и выпишем уравнение для проекции $\zeta_\parallel$ поляризации на направление движения. Вычисление с помощью (41,8—9) приводит к следующему результату [2]:

$$\frac{d\zeta_\parallel}{dt} = 2\mu'(\boldsymbol{\zeta}_\perp[\mathbf{Hn}]) + \frac{2}{v}\left(\frac{\mu m^2}{\varepsilon^2} - \mu'\right)(\boldsymbol{\zeta}_\perp\mathbf{E}). \qquad (41,11)$$

Ряд примеров применения полученных уравнений рассмотрен в задачах к этому параграфу. Здесь же отметим лишь, что при движении в чисто магнитном поле поляризация частицы без

[1]) Если ввести, как это часто делается, для заряженных частиц гиромагнитный коэффициент (множитель Ланде) g согласно $\mu = g\frac{e}{2m}\frac{1}{2}\left(= g\frac{e}{2mc}\frac{\hbar}{2}\right)$, то это уравнение запишется в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{e}{2m}\left(g - 2 + 2\frac{m}{\varepsilon}\right)[\boldsymbol{\zeta}\mathbf{H}] + \frac{e}{2m}(g-2)\frac{\varepsilon}{\varepsilon + m}(\mathbf{vH})[\mathbf{v}\boldsymbol{\zeta}] + \\ + \frac{e}{2m}\left(g - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + m}\right)[\boldsymbol{\zeta}[\mathbf{Ev}]]. \qquad (41,9а)$$

[2]) Несколько короче это уравнение можно получить, раскрывая временную компоненту уравнения (41,7).

аномального магнитного момента сохраняет постоянный угол со скоростью ($\zeta_{\parallel} = \mathrm{const}$). Таким образом, этот результат, указанный уже выше для нерелятивистского случая, действительно, имеет общий характер.

Уточним условия применимости полученных уравнений. Упомянутое вначале требование достаточно медленного изменения импульса частицы сводится к определенному условию малости полей **E** и **H**; в частности, ларморов радиус в магнитном поле ($\sim p/eH$) должен быть велик по сравнению с длиной волны частицы. Помимо этого, однако, должно выполняться, строго говоря, еще и условие не слишком быстрого изменения полей в пространстве: поле должно мало меняться на размерах квазиклассического волнового пакета. Тем самым, поле должно мало меняться на расстояниях порядка длины волны частицы ($1/p$), а также на комптоновской длине волны, $1/m$ [1]).

Впрочем, в практических задачах о движении в макроскопических полях условие медленности их изменения заведомо выполняется, так что фактически требуется лишь достаточная их малость.

В § 33 были найдены первые релятивистские поправки для гамильтониана электрона, движущегося во внешнем поле. Для электрона в электрическом поле приближенный гамильтониан имеет вид (см. (33,12))

$$\hat{H} = \hat{H}' - \frac{e}{4m}\left(\sigma\left[\mathbf{E}\frac{\hat{\mathbf{p}}}{m}\right]\right), \qquad \hat{\mathbf{p}} = -i\nabla, \tag{41,12}$$

где в $\hat{H}'$ включены члены, не содержащие спина. В нашем случае в силу медленного изменения поля в $\hat{H}'$ следует пренебречь членом с производными от **E** (т. е. с div **E**); можно опустить также малый член с $\hat{\mathbf{p}}^4$, не имеющий отношения к интересующим нас здесь эффектам поля, так что $\hat{H}'$ (в отсутствие магнитного поля) сводится к нерелятивистскому гамильтониану $\hat{H}' = \hat{\mathbf{p}}^2/2m + e\Phi$.

Формулу (41,12) можно получить также исходя из уравнения (41,9), не прибегая непосредственно к уравнению Дирака. Тем самым будет достигнуто ее обобщение (в квазиклассическом случае) для частиц с аномальным магнитным моментом.

С точностью до членов первого порядка по скорости v уравнение движения спина в электрическом поле получается из

---

[1]) Последнее требование возникает из условия, чтобы разброс скоростей в волновом пакете в его системе покоя был мал по сравнению с c; в противном случае в этой системе нельзя было бы пользоваться нерелятивистскими формулами.

Если поле меняется слишком быстро, в уравнениях могут оказаться существенными дополнительные члены, содержащие производные поля по координатам.

(41,9) в виде

$$\frac{d\zeta}{dt} = (\mu + \mu')[\zeta[\mathbf{E}\mathbf{v}]] = \left(\frac{e}{2m} + 2\mu'\right)[\zeta[\mathbf{E}\mathbf{v}]].$$

Если потребовать, чтобы это уравнение получалось квантовомеханически путем коммутирования оператора спина с гамильтонианом (согласно (41,3)), то, как легко проверить, надо положить

$$\hat{H} = \hat{H}' - \left(\mu' + \frac{e}{4m}\right)\left(\sigma\left[\mathbf{E}\frac{\hat{\mathbf{p}}}{m}\right]\right). \qquad (41,13)$$

Это и есть искомое выражение. При $\mu' = 0$ мы возвращаемся к (41,12). Обратим внимание на то, что «нормальный» магнитный момент $e/2m$ входит с лишним множителем $^1/_2$ по сравнению с аномальным моментом μ' [1]).

Задачи

1. Определить изменение направления поляризации частицы при ее движении в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю ($\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$).

Решение. В правой стороне уравнения (41,9) остается лишь первый член, т. е. вектор ζ прецессирует вокуг направления $\mathbf{H}$ (ось z) с угловой скоростью

$$-\frac{2\mu m + 2\mu'(\varepsilon - m)}{\varepsilon}\mathbf{H} = -\left(\frac{e}{\varepsilon} + 2\mu'\right)\mathbf{H}.$$

С этой же угловой скоростью вращается в плоскости xy проекция ζ на эту плоскость (обозначим ее $\zeta_\perp$). Вектор же $\mathbf{v}$ вращается в той же плоскости с угловой скоростью $-e\mathbf{H}/\varepsilon$ (как это видно из уравнения движения $\dot{\mathbf{p}} = \varepsilon\dot{\mathbf{v}} = e[\mathbf{v}\mathbf{H}]$). Отсюда видно, что $\zeta_\perp$ поворачивается относительно направления $\mathbf{v}$ с угловой скоростью $-2\mu'\mathbf{H}$.

2. То же при движении вдоль направления магнитного поля.

Решение. При совпадающих направлениях $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ уравнение (41,9) приводится к виду

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{2\mu m}{\varepsilon}[\zeta\mathbf{H}],$$

т. е. ζ прецессирует вокруг общего направления $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ с угловой скоростью $-2\mu m\mathbf{H}/\varepsilon$.

3. То же при движении в однородном электрическом поле.

Решение. Пусть поле $\mathbf{E}$ направлено вдоль оси x, а движение происходит в плоскости xy (при этом $p_y = \mathrm{const}$). Из (41,9) видно, что вектор ζ прецессирует вокруг оси z с мгновенной угловой скоростью

$$-\left(\frac{e}{\varepsilon + m} + 2\mu'\right)E\frac{p_y}{\varepsilon}.$$

---

[1]) Это и есть та «томасовская половинка», которая упоминалась в примечании на с. 152. Изложенный здесь вывод ясно демонстрирует ее происхождение.

Снова разложим ζ на составляющие $\zeta_\parallel$ и $\zeta_\perp$ (в плоскости xy). Тогда

$$\zeta_\parallel = \zeta_\perp \cos\varphi, \quad \zeta_\perp \mathbf{E} = -\zeta_\perp \sin\varphi \cdot \frac{v_y}{v}.$$

Из (41,11) находим, что $\zeta_\perp$ вращается относительно направления $\mathbf{v}$ с мгновенной угловой скоростью

$$\dot{\varphi} = \frac{2v_y}{v^2}\left(\frac{\mu m^2}{\varepsilon^2} - \mu'\right) = \frac{p_y}{\varepsilon}\left(\frac{em}{p^2} - 2\mu'\right).$$

§ 42. Рассеяние нейтронов в электрическом поле

При столкновениях нейтронов с ядрами рассеяние на большие углы определяется основным взаимодействием — ядерными силами. При рассеянии же на малые углы становится существенным, как мы увидим, взаимодействие магнитного момента нейтрона с электрическим полем ядра (*J. Schwinger*, 1948).

Будем предполагать нейтрон нерелятивистским, так что рассматриваемое взаимодействие описывается приближенным гамильтонианом (41,13). Весь магнитный момент электрически нейтральной частицы является «аномальным», а оператор $\hat{H}'$ сводится в этом случае к оператору кинетической энергии[1]):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + i\frac{\mu\hbar}{mc}\sigma[\mathbf{E}\nabla]. \tag{42,1}$$

Ввиду малости электромагнитного взаимодействия нейтрона амплитуда f_{em} обусловленного им рассеяния может вычисляться в борновском приближении:

$$f_{em} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}/\hbar}\left(i\frac{\mu\hbar}{mc}\sigma[\mathbf{E}\nabla]\right)e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}\,d^3x$$

(см. III, § 126), или

$$f_{em} = \frac{\mu}{2\pi c\hbar^2}\sigma[\mathbf{E}_\mathbf{q}\mathbf{p}], \quad \mathbf{E}_\mathbf{q} = \int \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\,d^3x \tag{42,2}$$

($\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ — импульсы нейтрона до и после рассеяния, $\hbar\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$). В написанном виде амплитуда f_{em} является оператором по отношению к спиновой переменной.

Прежде чем заняться дальнейшим вычислением, сделаем следующее замечание. Формула (42,1) была выведена в предыдущем параграфе для медленно меняющихся полей (что фактически означало пренебрежение в гамильтониане членами, содержащими производные от поля по координатам). В применении к кулонову полю ядра это значит, что длина волны $\hbar/p$ должна быть мала по сравнению с существенными в интеграле $\mathbf{E}_\mathbf{q}$ рас-

[1]) В этом параграфе пользуемся обычными единицами, а буква m обозначает массу нейтрона.