ГЛАВА V

ИЗЛУЧЕНИЕ

§ 43. Оператор электромагнитного взаимодействия

Взаимодействие электронов с электромагнитным полем, как правило, может рассматриваться с помощью теории возмущений. Это обстоятельство связано со сравнительной слабостью электромагнитного взаимодействия, выражающейся в малости соответствующей безразмерной «константы связи» — постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$. Эта малость играет фундаментальную роль в квантовой электродинамике.

В классической электродинамике (см. II, § 16,28) электромагнитное взаимодействие описывается членом

$$-ej^{\mu}A_{\mu} \tag{43,1}$$

в плотности лагранжиана системы «поле + заряды» (A — 4-потенциал поля, j — 4-вектор плотности тока частиц). При этом плотность тока удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0, \tag{43,2}$$

выражающему закон сохранения заряда. Напомним (см. II, § 29), что калибровочная инвариантность теории тесно связана именно с этим законом. Действительно, при замене $A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\chi$ (4,1) к плотности лагранжиана (43,1) добавляется величина $-ej^{\mu}\partial_{\mu}\chi$, которая в силу (43,2) может быть записана в виде 4-дивергенции

$$-e\partial_{\mu}(\chi j^{\mu})$$

и поэтому выпадает при интегрировании по d^4x в действии $S = \int L d^4x$.

В квантовой электродинамике 4-векторы j и A заменяются соответствующими вторично квантованными операторами. При этом оператор тока выражается через ψ-операторы согласно $\hat{j} = \hat{\bar{\psi}}\gamma\hat{\psi}$. Роль обобщенных «координат» q в лагранжиане

$$\int \hat{L}_{\text{взаим}}\, d^3x = -e\int (\hat{j}\hat{A})\, d^3x$$

играют значения $\hat{\bar{\psi}}$, $\hat{\psi}$, $\hat{A}$ в каждой точке пространства. Поскольку плотность лагранжиана оказывается зависящей только от самих «координат» q (но не от их производных по x), переход к плотности гамильтониана по формуле (10,11) сводится лишь к изменению знака плотности лагранжиана [1]). Таким образом, оператор электромагнитного взаимодействия (интеграл по пространству от плотности гамильтониана взаимодействия) имеет вид

$$\hat{V} = e\int (\hat{j}\hat{A})\, d^3x. \tag{43,3}$$

Оператор свободного электромагнитного поля представляет собой сумму

$$\hat{A} = \sum_n \left[\hat{c}_n A_n(x) + \hat{c}_n^+ A_n^*(x)\right], \tag{43,4}$$

содержащую операторы рождения и уничтожения фотонов в различных состояниях (нумеруемых индексом n). Каждый из них имеет матричные элементы лишь для увеличения или уменьшения соответствующего числа заполнения N_n на 1 (при неизменных остальных числах заполнения). Поэтому и оператор $\hat{A}$ имеет матричные элементы лишь для переходов с изменением числа фотонов на 1. Другими словами, в первом приближении теории возмущений возникают только процессы однократного излучения или поглощения фотона.

Согласно (2,15) матричные элементы

$$\langle N_n - 1 | c_n | N_n \rangle = \langle N_n | c_n^+ | N_n - 1 \rangle = \sqrt{N_n}. \tag{43,5}$$

Если в начальном состоянии поля фотоны (сорта n) отсутствуют, то $\langle 1 | c_n^+ | 0 \rangle = 1$. Матричный элемент оператора (43,3) для испускания фотона

$$V_{fi}(t) = e\int (j_{fi} A_n^*)\, d^3x, \tag{43,6}$$

где $A_n(x)$ — волновая функция излучаемого фотона, а j_{fi} — матричный элемент оператора $\hat{j}$ для перехода излучателя из начального состояния i в конечное f [2]). 4-вектор $j^\mu_{fi} = (\rho_{fi}, \mathbf{j}_{fi})$ называют *током перехода*.

---

[1]) Независимо от этих рассуждений укажем, что если речь идет лишь о поправке первого порядка малости, то всякая малая поправка к лагранжиану переходит в гамильтониан лишь с изменением своего знака (см. I, § 40).

[2]) Обозначения в (43,6) содержат некоторую непоследовательность: индексы у V_{fi} относятся к состояним всей системы «излучатель + поле», а у j_{fi} — к состояниям одного излучателя.

Аналогичным образом получается матричный элемент для поглощения фотона:

$$V_{fi}(t) = e\int (j_{fi}A_n)\,d^3x. \tag{43,7}$$

Он отличается от (43,6) лишь тем, что вместо $A_n^*(x)$ стоит $A_n(x)$.

Указанием аргумента t у V_{fi} мы подчеркиваем, что речь идет о зависящем от времени матричном элементе. Выделив в волновых функциях временные множители, можно обычным образом перейти к независящим от времени матричным элементам:

$$V_{fi}(t) = V_{fi}e^{-i(E_i - E_f \mp \omega)t} \tag{43,8}$$

(E_i, E_f — начальная и конечная энергии излучающей системы; знаки $\mp$ соответствуют испусканию и поглощению фотона ω).

Волновая функция фотона с определенным импульсом $\mathbf{k}$ и определенной поляризацией

$$A^\mu = \sqrt{4\pi}\,\frac{e^\mu}{\sqrt{2\omega}}\,e^{i\mathbf{kr}} \tag{43,9}$$

(см. (4,3); временной множитель опущен). Подставив в (43,6), найдем матричный элемент для испускания такого фотона в виде

$$V_{fi} = e\sqrt{4\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\,e_\mu^* j_{fi}^\mu(\mathbf{k}), \tag{43,10}$$

где $j_{fi}(\mathbf{k})$ — ток перехода в импульсном представлении, т. е. компоненты Фурье

$$j_{fi}(\mathbf{k}) = \int j_{fi}(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{kr}}\,d^3x. \tag{43,11}$$

Аналогичная формула для поглощения фотона:

$$V_{fi} = e\sqrt{4\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\,e_\mu j_{fi}^\mu(-\mathbf{k}). \tag{43,12}$$

Уравнение сохранения тока в импульсном представлении записывается в виде условия 4-поперечности токов перехода:

$$k_\mu j_{fi}^\mu = \omega\rho_{fi}(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k}) = 0. \tag{43,13}$$

Написанные в этом параграфе формулы, в которых не предопределен вид оператора тока, имеют общий характер и справедливы для электромагнитных процессов с участием любых заряженных частиц. Существующая теория дает возможность установить вид оператора тока (и тем самым в принципе вычислить его матричные элементы) лишь для электронов. При применении же к системам сильновзаимодействующих частиц (в том числе к ядрам) мы ограничимся изложением полуфеноменологической теории, в которой токи перехода выступают как заимствуемые из опыта величины, удовлетворяющие лишь общим требованиям пространственно-временной симметрии и уравнению непрерывности.

§ 44. Испускание и поглощение

Вероятность перехода под влиянием возмущения $\hat{V}$ в первом приближении дается известными формулами теории возмущений (III, § 42). Пусть начальное и конечное состояния излучающей системы относятся к дискретному спектру[1]). Тогда вероятность (в единицу времени) перехода $i \to f$ с испусканием фотона есть

$$dw = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_i - E_f - \omega)\, d\nu, \tag{44,1}$$

где ν условно обозначает совокупность величин, характеризующих состояние фотона и пробегающих непрерывный ряд значений (при этом волновая функция фотона предполагается нормированной на δ-функцию «по шкале ν»).

Если испускается фотон с определенным значением момента, то единственной непрерывной величиной является частота ω. Интегрирование формулы (44,1) по $d\nu \equiv d\omega$ устраняет δ-функцию (заменяя ω определенным значением $\omega = E_i - E_f$), и тогда вероятность перехода

$$w = 2\pi |V_{fi}|^2. \tag{44,2}$$

Если же рассматривается испускание фотона с заданным импульсом $\mathbf{k}$, то $d\nu = d^3k/(2\pi)^3 = \omega^2\, d\omega\, do/(2\pi)^3$. При этом предполагается, что волновая функция фотона (плоская волна) нормирована на один фотон в объеме $V = 1$, как это принято везде в этой книге; $d\nu$ есть число состояний, приходящихся на фазовый объем $V\, d^3k$. Таким образом, вероятность испускания фотона с заданным импульсом запишется в виде

$$dw = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_i - E_f - \omega) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{44,3}$$

или после интегрирования по $d\omega$:

$$dw = \frac{1}{4\pi^2} |V_{fi}|^2 \omega^2\, do. \tag{44,4}$$

Сюда должен быть подставлен матричный элемент V_{fi} из (43,10).

В следующих параграфах мы воспользуемся этими формулами для вычисления вероятности излучения в различных конкрет-

[1]) Тем самым, во всяком случае, подразумевается пренебрежение отдачей: излучатель как целое остается неподвижным.