Пусть $dw_{\mathbf{k}\mathbf{e}}^{(\text{сп})}$ есть вероятность спонтанного излучения фотона с поляризацией $\mathbf{e}$ в телесный угол do; индексами (инд) и (погл) отметим аналогичные вероятности для индуцированного испускания и поглощения. Согласно (44,6) и (44,8) эти вероятности связаны между собой следующими соотношениями:

$$dw_{\mathbf{k}\mathbf{e}}^{(\text{погл})} = dw_{\mathbf{k}\mathbf{e}}^{(\text{инд})} = dw_{\mathbf{k}\mathbf{e}}^{(\text{сп})} \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} I_{\mathbf{k}\mathbf{e}}. \tag{44,9}$$

Если падающее излучение изотропно и не поляризовано ($I_{\mathbf{k}\mathbf{e}}$ не зависит от направлений $\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}$), то интегрирование (44,9) по do и суммирование по $\mathbf{e}$ дают аналогичные соотношения между полными вероятностями радиационных переходов (между заданными состояниями i и f системы)

$$w^{(\text{погл})} = w^{(\text{инд})} = w^{(\text{сп})} \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3} I, \tag{44,10}$$

где $I = 2 \cdot 4\pi I_{\mathbf{k}\mathbf{e}}$ — полная спектральная интенсивность падающего излучения.

Если состояния i и f излучающей (или поглощающей) системы вырождены, то полная вероятность излучения (или поглощения) данных фотонов получается суммированием по всем взаимно вырожденным конечным состояниям и усреднением по всем возможным начальным состояниям. Обозначим кратности вырождения (статистические веса) состояний i и f посредством g_i и g_f. Для процессов спонтанного и индуцированного испускания начальными являются состояния i, а для поглощения — состояния f. Предположив в каждом случае все g_i или g_f начальных состояний равновероятными, получим, очевидно, вместо (44,10), следующие соотношения:

$$g_f w^{(\text{погл})} = g_i w^{(\text{инд})} = g_i w^{(\text{сп})} \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3} I. \tag{44,11}$$

В литературе часто используются так называемые *коэффициенты Эйнштейна*, определяемые как

$$A_{if} = w^{(\text{сп})}, \quad B_{if} = w^{(\text{инд})} \frac{c}{I}, \quad B_{fi} = w^{(\text{погл})} \frac{c}{I} \tag{44,12}$$

(величина I/c есть пространственная спектральная плотность энергии излучения). Они связаны друг с другом соотношениями

$$g_f B_{fi} = g_i B_{if} = g_i A_{if} \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3}. \tag{44,13}$$

§ 45. Дипольное излучение

Применим полученные формулы к испусканию фотона релятивистским электроном в заданном внешнем поле. Ток перехода в этом случае есть матричный элемент оператора

$$\hat{j} = \hat{\bar{\psi}}\gamma\hat{\psi},$$

в котором ψ-операторы предполагаются разложенными по системе волновых функций стационарных состояний электрона в данном поле (см. § 32). Переходу электрона из состояния i в состояние f отвечает матричный элемент $\langle 0_i 1_f | j | 1_i 0_f \rangle$. Такое изменение чисел заполнения осуществляется оператором $\hat{a}_f^+ \hat{a}_i$, и для тока перехода получаем

$$j_{fi}^{\mu} = \bar{\psi}_f \gamma^{\mu} \psi_i = (\psi_f^* \psi_i, \ \psi_f^* \alpha \psi_i), \tag{45,1}$$

где ψ_i и ψ_f — волновые функции начального и конечного состояний электрона.

Выберем волновую функцию фотона в трехмерно поперечной калибровке (4-вектор поляризации $e = (0, \mathbf{e})$). Тогда в (43,10) произведение $j_{fi} e^* = -\mathbf{j}_{fi} \mathbf{e}^*$. Подставив V_{fi} в (44,4), получим следующую формулу для вероятности излучения (в 1 с) в элемент телесного угла do фотона с поляризацией $\mathbf{e}$:

$$dw_{\mathbf{en}} = e^2 \frac{\omega}{2\pi} |\mathbf{e}^* \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k})|^2 do, \tag{45,2}$$

где

$$\mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k}) = \int \psi_f^* \alpha \psi_i e^{-i\mathbf{kr}} d^3x. \tag{45,3}$$

Суммирование по поляризациям фотона осуществляется путем усреднения по направлениям $\mathbf{e}$ (в плоскости, перпендикулярной заданному направлению $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$), после чего результат умножается на 2 соответственно двум независимым возможностям поперечной поляризации фотона [1]). Таким образом, получается формула

$$dw_{\mathbf{n}} = e^2 \frac{\omega}{2\pi} |[\mathbf{n} \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k})]|^2 do. \tag{45,4}$$

Очень важен случай, когда длина волны фотона λ велика по сравнению с размерами излучающей системы a. Такая ситуация связана обычно с малостью скоростей частиц по сравнению со скоростью света. В первом приближении по a/λ (соответствующем дипольному излучению — ср. II, § 67) в токе перехода (45,3) можно заменить единицей множитель $e^{-i\mathbf{kr}}$, мало меняющийся в области, где ψ_i или ψ_f заметно отличны от нуля.

---

[1]) Для усреднения используется формула

$$\overline{e_i e_k^*} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k) \tag{45,4а}$$

или

$$\overline{(\mathbf{ae})(\mathbf{be}^*)} = \frac{1}{2}\{\mathbf{ab} - (\mathbf{an})(\mathbf{bn})\} = \frac{1}{2}[\mathbf{an}][\mathbf{bn}], \tag{45,4б}$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — постоянные векторы.

Такая замена означает, другими словами, пренебрежение импульсом фотона по сравнению с импульсами частиц в системе.

В том же приближении интеграл $\mathbf{j}_{fi}(0)$ может быть заменен его нерелятивистским выражением, т. е. просто матричным элементом $\mathbf{v}_{fi}$ скорости электрона по отношению к шредингеровским волновым функциям. В свою очередь этот элемент $\mathbf{v}_{fi} = -i\omega\mathbf{r}_{fi}$, а $e\mathbf{r}_{fi} = \mathbf{d}_{fi}$, где $\mathbf{d}$ — дипольный момент электрона (в его орбитальном движении). Таким образом, находим следующую формулу для вероятности дипольного излучения:

$$dw_{\mathbf{e}\mathbf{n}} = \frac{\omega^3}{2\pi}|\mathbf{e}^*\mathbf{d}_{fi}|^2 do \tag{45,5}$$

(направление $\mathbf{n}$ фигурирует здесь в неявном виде: вектор $\mathbf{e}$ должен быть перпендикулярен $\mathbf{n}$). Просуммировав по поляризациям, получим

$$dw_{\mathbf{n}} = \frac{\omega^3}{2\pi}|[\mathbf{n}\mathbf{d}_{fi}]|^2 do. \tag{45,6}$$

Ввиду нерелятивистского (по отношению к электрону) характера этих формул их обобщение на любые электронные системы очевидно: под $\mathbf{d}_{fi}$ надо понимать матричный элемент полного дипольного момента системы.

Проинтегрировав формулу (45,6) по всем направлениям, найдем полную вероятность излучения:

$$w = \frac{4\omega^3}{3}|\mathbf{d}_{fi}|^2, \tag{45,7}$$

или в обычных единицах:

$$w = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}|\mathbf{d}_{fi}|^2. \tag{45,7a}$$

Интенсивность I излучения получается умножением вероятности на $\hbar\omega$:

$$I = \frac{4\omega^4}{3c^3}|\mathbf{d}_{fi}|^2. \tag{45,8}$$

Эта формула обнаруживает непосредственную аналогию с классической формулой (см. II (67,11)) для интенсивности дипольного излучения системой периодически движущихся частиц: интенсивность излучения частоты $\omega_s = s\omega$ (где ω — частота движения частиц, s — целое число) равна

$$I_s = \frac{4\omega_s^4}{3c^3}|\mathbf{d}_s|^2, \tag{45,9}$$

где $\mathbf{d}_s$ — компоненты Фурье дипольного момента, т. е. коэффициенты разложения

$$\mathbf{d}(t)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\mathbf{d}_s e^{-is\omega t}. \qquad (45,10)$$

Квантовая формула (45,8) получается из (45,9) заменой этих компонент Фурье матричными элементами соответствующих переходов. Это правило (выражающее собой *принцип соответствия* Бора) является частным случаем общего соответствия между компонентами Фурье классических величин и квантовыми матричными элементами в квазиклассическом случае (см. III, § 48). Излучение квазиклассично для переходов между состояниями с большими квантовыми числами; при этом частота перехода $\hbar\omega = E_i - E_f$ мала по сравнению с энергиями излучателя E_i и E_f. Это обстоятельство, однако, не привело бы к каким-либо изменениям в виде формулы (45,8), справедливой для любых переходов. Этим объясняется тот (в известном смысле случайный) факт, что принцип соответствия для интенсивности излучения оказывается справедливым не только в квазиклассическом, но и в общем квантовом случае.

§ 46. Электрическое мультипольное излучение

Вместо того чтобы рассматривать излучение фотона в заданном направлении (т. е. с заданным импульсом), рассмотрим теперь излучение фотона с определенными значениями момента j и его проекции m на некоторое избранное направление z. Мы видели в § 6, что такие фотоны могут быть двух типов — электрического и магнитного; начнем с излучения фотонов электрического типа. При этом снова будем считать размеры излучающей системы малыми по сравнению с длиной волны.

Вычисления удобно производить с помощью волновых функций фотона в импульсном представлении, т. е. представив 4-вектор $A^\mu(\mathbf{r})$ в виде интеграла Фурье. Тогда матричный элемент

$$V_{fi}=e\int j^{\mu}_{fi}(\mathbf{r})\,A^{*}_{\mu}(\mathbf{r})\,d^3x=e\int d^3x\cdot j^{\mu}_{fi}(\mathbf{r})\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}A^{*}(\mathbf{k})\,e^{-i\mathbf{kr}} \qquad (46,1)$$

(для упрощения записи формул опускаем индексы ωjm у волновых функций фотона).

Для Ej-фотона берем волновую функцию из (7,10), выбрав произвольную постоянную C равной

$$C=-\sqrt{\frac{j+1}{j}}\,.$$

Цель такого выбора состоит в том, чтобы в пространственных компонентах волновой функции (А) сократились члены, содер-