в (46,9) эта формула и определит искомую зависимость, которая оказывается пропорциональной

$$\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ M_f & m & -M_i \end{pmatrix}^2$$

(при этом предполагается, конечно, что излучатель не находится во внешнем поле; тогда частота перехода ω не зависит от чисел M_i и M_f).

Просуммировав вероятность по всем значениям M_f (при заданном M_i), мы получим полную вероятность испускания фотона данной частоты с начального уровня системы n_iJ_i. В силу изотропии пространства очевидно, что эта величина не будет зависеть также и от начального значения M_i. Суммирование осуществляется с помощью формулы

$$\sum_{M_f} |\langle n_fJ_fM_f | Q_{l,-m} | n_iJ_iM_i\rangle|^2 = \frac{1}{2J_i+1} |\langle n_fJ_f \| Q_j \| n_iJ_i\rangle|^2 \quad (46,20)$$

(см. III (107,11)).

§ 47. Магнитное мультипольное излучение

Волновая функция фотона магнитного типа $A^\mu = (0, \mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ дается формулой (7,6). Подставив ее в (46,1), получим для матричного элемента перехода

$$V_{fi} = -e\frac{\sqrt{\omega}}{2\pi}\int d^3x \cdot \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r}) \int do_\mathbf{n} \cdot e^{-i\mathbf{kr}}\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{м})*}(\mathbf{n}). \quad (47,1)$$

Компоненты вектора $\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{м})}$ выражаются согласно (7,16) через шаровые функции порядка j. Воспользовавшись снова разложением (46,3), получим для внутреннего интеграла

$$\int e^{-i\mathbf{kr}}\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{м})*}(\mathbf{n})\,do_\mathbf{n} = 4\pi i^{-j} g_j(kr)\,\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{м})*}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right),$$

и после подстановки g_j из (46,5)[1])

$$V_{fi} = -ei^{-j}\frac{2\omega^{j+\frac{1}{2}}}{(2j+1)!!}\int \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r})\,r^j\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{м})*}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)d^3x.$$

Сюда надо подставить согласно определению (7,4):

$$\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{м})}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\,[\mathbf{r}\nabla Y_{jm}].$$

После этого преобразуем под интегралом

$$r^j\mathbf{j}_{fi}[\mathbf{r}\nabla Y_{jm}^*] = -[\mathbf{r}\mathbf{j}_{fi}]\,\nabla(r^jY_{jm}^*)$$

[1]) Не смешивать ток $\mathbf{j}$ с моментом j!

и получим

$$V_{fi}=(-1)^m i^l\sqrt{\frac{(2l+1)(l+1)}{\pi l}}\,\frac{\omega^{l+\frac{1}{2}}}{(2l+1)!!}\,e\left(Q^{(\text{м})}_{l,-m}\right)_{fi}, \qquad (47,2)$$

где введены величины

$$\left(Q^{(\text{м})}_{lm}\right)_{fi}=\frac{1}{l+1}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int[\mathbf{r}\mathbf{j}_{fi}]\,\nabla\left(r^lY_{lm}\right)d^3x. \qquad (47,3)$$

Их называют *2^l-польными магнитными моментами перехода.*

Ввиду аналогии между выражениями (47,2) и (46,6) для вероятности испускания получается формула, отличающаяся от (46,9) лишь заменой электрических моментов магнитными. Остается в силе также и формула (46,12) для углового распределения (как уже было отмечено в связи с (7,11)).

Рассмотрим структуру выражения (47,3) при $l=1$. В этом случае функции

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,rY_{10}=iz, \qquad \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,rY_{1,\pm1}=\mp\frac{i}{\sqrt{2}}(x\pm iy),$$

а их градиенты равны просто циркулярным ортам $\mathbf{e}^{(0)}$, $\mathbf{e}^{(\pm1)}$ (7,14). Поэтому величины $e\left(Q^{(\text{м})}_{1m}\right)_{fi}$ представляют собой сферические компоненты вектора

$$\boldsymbol{\mu}_{fi}=\frac{e}{2}\int[\mathbf{r}\mathbf{j}_{fi}]\,d^3x, \qquad (47,4)$$

который по своей структуре аналогичен классическому магнитному моменту (см. II, § 44). Полная вероятность $M1$-излучения выражается через эту величину формулой (обычные единицы)

$$w=\frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\,|\boldsymbol{\mu}_{fi}|^2. \qquad (47,5)$$

Покажем, каким образом формула (47,4) связана с обычным квантовым нерелятивистским выражением оператора магнитного момента.

Выражение тока перехода (см. III, § 115):

$$\mathbf{j}_{fi}=-\frac{i}{2m}\left(\psi_f^*\nabla\psi_i-\psi_i\nabla\psi_f^*\right)+\frac{\mu}{es}\operatorname{rot}\left(\psi_f^*\mathbf{s}\psi_i\right), \qquad (47,6)$$

где μ — магнитный момент частицы, s — ее спин. Поэтому

$$\boldsymbol{\mu}_{fi}=-\frac{ie}{4m}\int\psi_f^*[\mathbf{r}\nabla]\psi_i d^3x+\frac{ie}{4m}\int\psi_i[\mathbf{r}\nabla]\psi_f^*d^3x+\\+\frac{\mu}{2s}\int\left[\mathbf{r}\operatorname{rot}\left(\psi_f^*\mathbf{s}\psi_i\right)\right]d^3x. \qquad (47,7)$$

Во втором члене пишем

$$\int \psi_i [\mathbf{r}\nabla] \psi_f^* d^3x = -\int \psi_f^* [\mathbf{r}\nabla] \psi_i d^3x + \int \operatorname{rot} (\mathbf{r}\psi_f^*\psi_i)\, d^3x.$$

Последний интеграл преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и обращается в нуль. Таким образом, два первых члена в (47,7) одинаковы. В третьем члене преобразуем интеграл следующим образом (временно обозначаем $\mathbf{F} = \psi_f^* \hat{\mathbf{s}} \psi_i$):

$$\int [\mathbf{r}\,[\nabla\mathbf{F}]]\, d^3x = \oint [\mathbf{r}\,[d\mathbf{f}\cdot\mathbf{F}]] - \int [[\mathbf{F}\nabla]\,\mathbf{r}]\, d^3x.$$

Интеграл по поверхности обращается в нуль, а в последнем интеграле имеем: $[[F\nabla]\mathbf{r}] = -\mathbf{F}\operatorname{div}\mathbf{r} + \mathbf{F} = -2\mathbf{F}$. Таким образом,

$$\int [\mathbf{r}\operatorname{rot}\mathbf{F}]\, d^3x = 2\int \mathbf{F}\, d^3x.$$

В результате выражение для μ_{fi} принимает вид

$$\mu_{fi} = \int \psi_f^* \left(\frac{e}{2m}\hat{\mathbf{L}} + \frac{\mu}{s}\hat{\mathbf{s}}\right) \psi_i d^3x, \qquad (47,8)$$

где $\hat{\mathbf{L}} = -i[\mathbf{r}\nabla]$ — оператор орбитального момента частицы. Как и должно быть, μ_{fi} оказывается матричным элементом оператора

$$\hat{\mu} = \frac{e}{2m}\hat{\mathbf{L}} + \frac{\mu}{s}\hat{\mathbf{s}}, \qquad (47,9)$$

складывающегося из операторов орбитального и собственного магнитных моментов частицы.

Правила отбора для магнитного мультипольного излучения аналогичны правилам для электрического случая: для полного момента справедливы те же правила (46,15—16), а для четности — правило

$$P_i P_f = (-1)^{j+1}, \qquad (47,10)$$

получающееся подстановкой в (46,17) четности Mj-фотона: $P_ф = (-1)^{j+1}$.

§ 48. Угловое распределение и поляризация излучения

Выведенные в § 46 и 47 формулы относились к испусканию фотона с определенными значениями момента j и его проекции m. Соответственно предполагалось, что и излучающая система (скажем, ядро) до и после испускания обладает не только