Во втором члене пишем

$$\int \psi_i [\mathbf{r}\nabla] \psi_f^* d^3x = -\int \psi_f^* [\mathbf{r}\nabla] \psi_i d^3x + \int \operatorname{rot} (\mathbf{r}\psi_f^*\psi_i)\, d^3x.$$

Последний интеграл преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и обращается в нуль. Таким образом, два первых члена в (47,7) одинаковы. В третьем члене преобразуем интеграл следующим образом (временно обозначаем $\mathbf{F} = \psi_f^* \hat{\mathbf{s}} \psi_i$):

$$\int [\mathbf{r}[\nabla\mathbf{F}]]\, d^3x = \oint [\mathbf{r}[d\mathbf{f}\cdot\mathbf{F}]] - \int [[\mathbf{F}\nabla]\mathbf{r}]\, d^3x.$$

Интеграл по поверхности обращается в нуль, а в последнем интеграле имеем: $[[F\nabla]\mathbf{r}] = -\mathbf{F}\operatorname{div}\mathbf{r} + \mathbf{F} = -2\mathbf{F}$. Таким образом,

$$\int [\mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{F}]\, d^3x = 2\int \mathbf{F}\, d^3x.$$

В результате выражение для μ_{fi} принимает вид

$$\mu_{fi} = \int \psi_f^* \left(\frac{e}{2m}\hat{\mathbf{L}} + \frac{\mu}{s}\hat{\mathbf{s}}\right) \psi_i d^3x, \tag{47,8}$$

где $\hat{\mathbf{L}} = -i[\mathbf{r}\nabla]$ — оператор орбитального момента частицы. Как и должно быть, μ_{fi} оказывается матричным элементом оператора

$$\hat{\mu} = \frac{e}{2m}\hat{\mathbf{L}} + \frac{\mu}{s}\hat{\mathbf{s}}, \tag{47,9}$$

складывающегося из операторов орбитального и собственного магнитных моментов частицы.

Правила отбора для магнитного мультипольного излучения аналогичны правилам для электрического случая: для полного момента справедливы те же правила (46,15—16), а для четности — правило

$$P_i P_f = (-1)^{j+1}, \tag{47,10}$$

получающееся подстановкой в (46,17) четности Mj-фотона: $P_\phi = (-1)^{j+1}$.

§ 48. Угловое распределение и поляризация излучения

Выведенные в § 46 и 47 формулы относились к испусканию фотона с определенными значениями момента j и его проекции m. Соответственно предполагалось, что и излучающая система (скажем, ядро) до и после испускания обладает не только (в правильности нормировки мы убедимся ниже). Преобразуем эту формулу, разложив произведение двух D-функций в ряд III (110,2)

$$D^{(j)}_{\lambda m}D^{(j)*}_{\lambda' m'} = (-1)^{\lambda'+m'} D^{(j)}_{\lambda m} D^{(j)}_{-\lambda', -m'} =$$
$$= (-1)^{\lambda+m} \sum_L (2L+1) \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} D^{(L)}_{\Lambda\mu}$$

(индексы $\Lambda = \lambda - \lambda'$, $\mu = m - m'$; L — целые числа, $L \geqslant 2j$). Таким образом, получаем окончательно

$$w(\mathbf{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_L \sum_{(m)} (-1)^{2J_i - M_i - M_i' + m + 1} (2L+1) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f' & -m' & -M_i' \end{pmatrix} D^{(L)}_{\Lambda\mu}(\mathbf{n}) \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle \times$$
$$\times \langle M_f' | \rho^{(f)} | M_f \rangle \langle \lambda' | \rho^{(\gamma)} | \lambda \rangle. \qquad (48,5)$$

Как и выше, $\sum_{(m)}$ означает суммирование по всем (дважды повторяющимся) m-индексам. При этом надо помнить об отличии индексов λ, λ' от остальных m-индексов: суммирование по ним производится не по всем $2j+1$ возможным (при данном j-индексе) значениям, а лишь по двум значениям: $\lambda, \lambda' = \pm 1$, отвечающим двум поляризациям фотона.

Формула (48,5) содержит в себе всю необходимую информацию об угловом распределении испускаемых фотонов и их поляризации, а также о поляризации вторичных (т. е. испустивших фотон) ядер. При этом подразумевается, что начальная матрица плотности задана.

Угловое распределение

Угловое распределение фотонов получится суммированием по всем поляризациям фотона и вторичного ядра. Усреднение по поляризациям осуществляется подстановкой матриц плотности неполяризованных состояний:

$$\langle \lambda | \rho^{(\gamma)} | \lambda' \rangle = \frac{1}{2} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \langle M_f | \rho^{(f)} | M_f' \rangle = \frac{1}{2J_f+1} \delta_{M_f M_f'}, \qquad (48,6)$$

после чего суммирование сводится к умножению на 2 (для фотона) или на $2J_f + 1$ (для ядра). Другими словами, суммирование осуществляется просто заменой

$$\langle \lambda | \rho^{(\gamma)} | \lambda' \rangle \to \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \langle M_f | \rho^{(f)} | M_f' \rangle \to \delta_{M_f M_f'}. \qquad (48,7)$$

Таким образом, угловое распределение

$$\bar{w}(\mathbf{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_L \sum_{(m)} (-1)^{m'+1} (2L+1) D_{0\mu}^{(L)}(\mathbf{n}) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m' & M_i' \end{pmatrix} \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle.$$

Эту формулу можно существенно упростить, произведя суммирования по m-индексам.

Прежде всего замечаем, что

$$\begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = (-1)^L \begin{pmatrix} j & j & L \\ -\lambda & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \tag{48,8}$$

и потому сумма

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{при четных } L, \\ 0 & \text{при нечетных } L. \end{cases}$$

Таким образом, в сумме по L остаются лишь члены с четными L, т. е. в нее входят шаровые функции $\left(D_{0\mu}^{(L)}\right)$ лишь четных порядков. Этот результат можно было предвидеть: в силу сохранения четности вероятность должна быть инвариантна по отношению к инверсии, т. е. к замене $\mathbf{n} \to -\mathbf{n}$.

Таким образом,

$$\bar{w}(\mathbf{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{4\pi} \sum_L (2L+1) \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} D_{0\mu}^{(L)}(\mathbf{n}) \times$$
$$\times \sum_{(m)} (-1)^{m'+1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m' & M_i' \end{pmatrix} \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle.$$

Отметим, что здесь легко проверить нормировку: в силу формулы

$$\int D_{0\mu}^{(L)}(\mathbf{n}) \frac{do}{4\pi} = \delta_{L0}\delta_{\mu 0}$$

после интегрирования по направлениям остается лишь член с $L = \mu = 0$; с помощью формул

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \frac{1}{\sqrt{2j+1}},$$

$$\sum_{M_f m} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2J_i+1}, \quad \mathrm{Sp}\,\rho^{(i)} = 1$$

убедимся, что интеграл равен 1.

определенными значениями момента J, що и определенными поляризациями, т. е. значениями M.

Рассмотрим теперь более общий случай излучения частично поляризованным ядром (размеры которого по-прежнему предполагаются малыми по сравнению с длиной волны). Испускаемый фотон по-прежнему обладает определенным моментом j, но может быть частично поляризован. Найдем вероятность испускания как функцию направления $\mathbf{n}$ фотона. Она должна быть выражена через матрицы плотности, описывающие поляризационные состояния ядра и фотона.

Для этого предварительно напишем вероятность испускания как функцию направления $\mathbf{n}$ и спиральности λ фотона ($\lambda=\pm 1$) для случая, когда начальное и конечное ядра обладают определенными значениями: J_iM_i и J_fM_f.

Матричный элемент испускания фотона с определенными jm пропорционален матричному элементу 2^j-польного (электрического или магнитного) момента ядра:

$$\langle J_fM_f;\ jm|V|J_iM_i\rangle \propto (-1)^m \langle J_fM_f|Q_{j,-m}|J_iM_i\rangle. \tag{48,1}$$

Волновая функция испущенного фотона (в импульсном представлении) пропорциональна $\mathbf{Y}^{(э)}_{jm}(\mathbf{n})$ или $\mathbf{Y}^{(м)}_{jm}(\mathbf{n})$. Волновая же функция фотона с импульсом в направлении $\mathbf{n}$ и спиральностью λ пропорциональна вектору поляризации $\mathbf{e}^{(\lambda)}$. Матричный элемент испускания фотона $\mathbf{n}\lambda$ получится перемножением (48,1) с проекцией волновой функции состояния $|jm\rangle$ на волновую функцию состояния $|\mathbf{n}\lambda\rangle$:

$$\langle J_fM_f;\ \mathbf{n}\lambda|V|J_iM_i\rangle \propto (-1)^m \langle J_fM_f|Q_{j,-m}|J_iM_i\rangle (\mathbf{e}^{(\lambda)*}\mathbf{Y}_{jm}).$$

Согласно (16,23) для фотонов обоих типов

$$\mathbf{e}^{(\lambda)*}\mathbf{Y}_{jm}(\mathbf{n}) \propto D^{(j)}_{\lambda m}(\mathbf{n}). \tag{48,2}$$

Матричный же элемент мультипольного момента выражаем обычным образом через приведенный элемент. В результате получаем амплитуду вероятности перехода в виде

$$\langle J_fM_f;\ \mathbf{n}\lambda|V|J_iM_i\rangle \propto (-1)^{J_f-M_f+m} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} Q D^{(j)}_{\lambda m}(\mathbf{n}), \tag{48,3}$$

где Q обозначает $\langle J_f\|Q\|J_i\rangle$.

Теперь мы можем перейти к общему случаю смешанных поляризационных состояний. Согласно общим правилам квантовой механики вероятность перехода будет пропорциональна выражению [1])

$$\sum_{(m)} \langle J_f M_f;\ \mathbf{n}\lambda\,|\,V\,|\,J_i M_i\rangle \langle J_f M_f';\ \mathbf{n}\lambda'\,|\,V\,|\,J_i M_i'\rangle^* \times$$
$$\times \langle M_i\,|\,\rho^{(i)}\,|\,M_i'\rangle \langle M_f'\,|\,\rho^{(f)}\,|\,M_f\rangle \langle \lambda'\,|\,\rho^{(\nu)}\,|\,\lambda\rangle, \qquad (48,4)$$

где $\rho^{(i)}$, $\rho^{(f)}$, $\rho^{(\nu)}$ — матрицы плотности начального ядра, конечного ядра и испущенного фотона; символ (m) под знаком суммы означает, что суммирование производится по всем дважды повторяющимся m-индексам $(M_i M_i' M_f M_f' \lambda\lambda')$. В (48,4) надо подставить (48,3).

Обозначим вероятность испускания фотона в телесный угол do через $w(\mathbf{n})do$. Полная вероятность испускания по всем направлениям и со всеми поляризациями фотона и вторичного ядра не зависит, очевидно, от начального поляризационного состояния ядра. Она дается уже известными нам формулами и нас здесь не интересует. Поэтому условимся нормировать вероятность $w(\mathbf{n})$ на 1. Для нее получается [2])

$$w(\mathbf{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_{(m)} (-1)^{2J_i - M_i - M_i'} D^{(j)}_{\lambda m} D^{(j)*}_{\lambda' m'} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f' & -m' & M_i' \end{pmatrix} \langle M_i\,|\,\rho^{(i)}\,|\,M_i'\rangle \times$$
$$\times \langle M_f'\,|\,\rho^{(f)}\,|\,M_f\rangle \langle \lambda'\,|\,\rho^{(\nu)}\,|\,\lambda\rangle$$

---

[1]) Если начальное и конечное состояния системы описываются суперпозициями

$$\psi^{(i)} = \sum_n a_n \psi_n^{(i)}, \qquad \psi^{(f)} = \sum_m b_m \psi_m^{(f)},$$

то матричный элемент

$$\langle f\,|\,V\,|\,i\rangle = \sum_{mn} b_m^* a_n V_{mn},$$

а его квадрат

$$|\langle f\,|\,V\,|\,i\rangle|^2 = \sum_{nn'mm'} V_{mn} V^*_{m'n'} a_n a^*_{n'} b_{m'} b^*_m.$$

Переход к случаю смешанных состояний осуществляется заменой

$$a_n a^*_{n'} \to \rho^{(i)}_{nn'}, \qquad b_{m'} b^*_m \to \rho^{(f)}_{m'm},$$

так что

$$|\langle f\,|\,V\,|\,i\rangle|^2 \to \sum_{nn'mm'} V_{mn} V^*_{m'n'} \rho^{(i)}_{nn'} \rho^{(f)}_{m'm}.$$

[2]) При преобразованиях знакового множителя можно пользоваться тем, что числа $2J_i$, $2J_f$, $2M_i$, $2M_f$ одинаковой четности. Напомним также, что числа j, m целые, а $\lambda = \pm 1$.

Дальнейшее суммирование по $mm'\mathcal{M}_f$ во внутренней сумме в $\bar{w}(\mathbf{n})$ производится с помощью формулы III (108,4). В результате получим для углового распределения фотонов следующую окончательную формулу:

$$\bar{w}(\mathbf{n}) = (-1)^{1+J_i+J_f} \frac{(2j+1)\sqrt{2J_i+1}}{4\pi} \sum_{\text{чет } L} (-i)^L \sqrt{2L+1} \times \\ \times \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ j & j & J_f \end{Bmatrix} \sum_{\mu} \mathcal{P}^{(i)*}_{L\mu} D^{(L)}_{0\mu}(\mathbf{n}), \quad (48,9)$$

где обозначено

$$\mathcal{P}^{(i)}_{L\mu} = i^L \sqrt{(2L+1)(2J_i+1)} \sum_{M_i M_i'} (-1)^{J_i - M_i'} \begin{pmatrix} J_i & L & J_i \\ -M_i' & \mu & M_i \end{pmatrix} \times \\ \times \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle,$$

$$\mathcal{P}^{(i)*}_{L\mu} = (-1)^{L-\mu} \mathcal{P}^{(i)}_{L,-\mu}. \quad (48,10)$$

Внутренняя сумма в (48,9) берется по всем $|\mu| \leqslant L$, а внешняя — по всем четным значениям L, удовлетворяющим условиям

$$L \leqslant 2j, \quad L \leqslant 2J_i \quad (48,11)$$

(эти условия — следствие правила треугольника, которому должны удовлетворять j-индексы в $3j$-символах, фигурирующих в (48,9—10)). В силу этих условий число членов в сумме обычно невелико. Так, при $J_i = 0$ или $^1/_2$ остается лишь член с $L = 0$, т. е. излучение изотропно (легко убедиться в том, что член с $L = 0$ равен $^1/_4$, как и должно было быть по условию нормировки). При $J_i = 1$, $^3/_2$ или при $j = 1$ в сумме по L остается два члена: $L = 0, 2$. Отметим также, что если матрица плотности $\rho^{(i)}$ диагональна $(M_i = M_i')$, то $\mu = 0$, и функция распределения (48,9) принимает вид разложения по полиномам Лежандра (согласно (16,5) и III (58,23) функции $D^{(L)}_{00}$ сводятся к функциям $P_L(\cos\theta)$). Наконец, если

$$\langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle = \frac{1}{2J_i+1} \delta_{M_i M_i'},$$

т. е. начальное ядро не поляризовано, то все $\mathcal{P}^{(i)}_{L\mu} = 0$, кроме $\mathcal{P}^{(i)}_{00} = 1$ [1]).

[1]) Действительно, заметив, что

$$\begin{pmatrix} J & 0 & J \\ -M' & 0 & M \end{pmatrix} = (-1)^{J-M} \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \delta_{MM'},$$

имеем

$$\sum_{MM'} (-1)^{J-M'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \delta_{MM'} = \\ = \sqrt{2J+1} \sum_{MM'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 0 & J \\ -M' & 0 & M \end{pmatrix} = \sqrt{2J+1}\, \delta_{L0} \delta_{\mu 0},$$

после чего из определения (48,10) найдем указанный результат.

Величины $\mathscr{P}_{L\mu}$ — удобные характеристики поляризационного состояния ядра; назовем их *поляризационными моментами.* Формула (48,10) определяет эти величины через матрицу плотности $\rho_{MM'}$. Прямой проверкой легко убедиться в справедливости обратной формулы, выражающей эту матрицу через поляризационные моменты:

$$\rho_{MM'}=\sum_{L\mu}\sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}}\,i^{-L}(-1)^{J-M'}\begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix}\mathscr{P}_{L\mu}. \qquad (48,12)$$

Пусть $f_{L\mu}$ — некоторый сферический тензор, зависящий от поляризационного состояния ядра. Согласно общим правилам (см. III (14,8)) его среднее значение в состоянии с матрицей плотности $\rho_{MM'}$ равно

$$\bar{f}_{L\mu}=\sum_{MM'}\rho_{MM'}\langle JM'|\,f_{L\mu}|\,JM\rangle. \qquad (48,13)$$

Выразив матричные элементы величин $f_{L\mu}$ через приведенный элемент $\langle J\|\,f_L\,\|J\rangle$ согласно

$$\langle JM'\,|\,f_{L\mu}|\,JM\rangle=i^L(-1)^{J-M'}\begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix}\langle J\,\|f_L\|\,J\rangle$$

и введя поляризационные моменты согласно определению (48,10), получим

$$\bar{f}_{L\mu}=\frac{\langle J\|\,f_L\,\|J\rangle}{\sqrt{(2L+1)\,(2J+1)}}\,\mathscr{P}_{L\mu}. \qquad (48,14)$$

Поляризация фотона

При заданных (наряду с $\rho^{(i)}$) матрицах $\rho^{(\gamma)}$ и $\rho^{(f)}$ формула (48,5) определяет вероятность перехода, при котором испускаемый фотон и ядро оказываются в определенных поляризационных состояниях. Эти состояния являются по существу характеристикой не процесса излучения как такового, а тех детекторов, которые регистрируют фотон и ядро отдачи, выделяя их определенные поляризации. Более естественна другая постановка вопроса, в которой конечное состояние системы «ядро + фотон» заранее не фиксируется, и требуется определить поляризационную матрицу плотности этого состояния при заданном лишь направлении испускания фотона.

Ответ на этот вопрос дается той же формулой (48,5). Если представить ее в виде

$$w=\bar{w}(\mathbf{n})\sum_{(m)}\langle M_f;\ \mathbf{n}\lambda\,|\,\rho\,|\,M_f';\ \mathbf{n}\lambda'\rangle\langle\lambda'\,|\rho^{(\gamma)}|\,\lambda\rangle\langle M_f'\,|\,\rho^{(f)}|\,M_f\rangle, \qquad (48,15)$$

то выражение $\langle M_f;\ \mathbf{n}\lambda|\rho|M'_f;\ \mathbf{n}\lambda'\rangle$ и будет искомой матрицей плотности, так как согласно общим правилам квантовой механики вероятность w перехода в наперед заданное состояние дается ее «проекцией» на данные $\rho^{(\gamma)}\rho^{(f)}$. Множитель $\bar{w}(\mathbf{n})$ выделен в (48,15) для того, чтобы эта матрица была нормирована обычным условием

$$\sum_{\lambda M_f}\langle M_f;\ \mathbf{n}\lambda|\rho|M_f;\ \mathbf{n}\lambda\rangle=1.$$

Если мы интересуемся поляризацией только фотона, то надо просуммировать по $M_f=M'_f$:

$$\langle\mathbf{n}\lambda|\rho|\mathbf{n}\lambda'\rangle=\sum_{M_f}\langle M_f;\ \mathbf{n}\lambda|\rho|M_f;\ \mathbf{n}\lambda'\rangle.$$

Вполне аналогично выводу формулы (48,9) получим

$$\langle\mathbf{n}\lambda|\rho|\mathbf{n}\lambda'\rangle=(-1)^{1+J_i+J_f}\frac{(2j+1)\sqrt{2J_i+1}}{8\pi\bar{w}(\mathbf{n})}\times$$
$$\times\sum_L(-i)^L\sqrt{2L+1}\begin{pmatrix} j & j & L\\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} J_i & J_i & L\\ j & j & J_f\end{Bmatrix}\sum_\mu \mathscr{P}^{(i)*}_{L\mu}D^{(L)}_{\Lambda\mu}(\mathbf{n}) \qquad (48,16)$$

$(\Lambda=\lambda-\lambda')$, причем суммирование производится по всем целым значениям L, удовлетворяющим условиям (48,11).

В частности, круговая поляризация определяется параметром Стокса

$$\xi_2=\langle\mathbf{n}1|\rho|\mathbf{n}1\rangle-\langle\mathbf{n},\ -1|\rho|\mathbf{n},\ -1\rangle$$

(см. задачу к § 8). В силу соотношения (48,8) в этой разности выпадают все члены с четными L, и для ξ_2 получается формула, отличающаяся от выражения (48,9) лишь тем, что суммирование производится по нечетным (вместо четных) значениям L.

Поляризация вторичных ядер

Наконец, если нас интересует только конечная поляризация ядер, надо положить $\rho^{(\gamma)}\to\delta$. Если при этом произвести также и интегрирование по направлениям фотона, то матрица плотности вторичного ядра будет:

$$\langle M_f|\rho|M'_f\rangle=\int\bar{w}(\mathbf{n})\langle M_f\mathbf{n}|\rho|M'_f\mathbf{n}\rangle do=$$
$$=(2J_i+1)\sum_{mM_iM'_i}(-1)^{2J_i-M_i-M'_i}\begin{pmatrix} J_f & j & J_i\\ -M_f & -m & M_i\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} J_f & j & J_i\\ -M'_f & -m & M'_i\end{pmatrix}\langle M_i|\rho^{(i)}|M'_i\rangle.$$

Вычисленные по этой матрице поляризационные моменты равны

$$\mathcal{P}^{(f)}_{L\mu} = (-1)^{J_i+J_f+L+j}\sqrt{(2J_i+1)(2J_f+1)}\begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ J_f & J_f & j \end{Bmatrix}\mathcal{P}^{(i)}_{L\mu}. \quad (48,17)$$

Если начальное ядро не поляризовано, то и конечное ядро не будет поляризовано. Однако при этом будет иметься корреляционная поляризация, т. е. поляризация ядра после излучения в заданном направлении. Положив $\rho^{(i)} \to \delta/(2J_i+1)$ (и соответственно $\overline{w}(\mathbf{n}) = 1/4\pi$) и произведя вычисление, аналогичное выводу (48,9), получим для описывающей эту поляризацию матрицы плотности

$$\langle M_f;\ \mathbf{n}|\rho|M'_f;\ \mathbf{n}\rangle =$$
$$= (2j+1)(-1)^{J_i+M'_f+1}\sum_{\text{чет } L}(2L+1)\begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_f & L & J_f \\ -M'_f & \mu & M_f \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{Bmatrix} J_f & J_f & L \\ j & j & J_i \end{Bmatrix}D^{(L)}_{0\mu}(\mathbf{n}). \quad (48,18)$$

Соответствующие этой матрице поляризационные моменты

$$\mathcal{P}^{(f)}_{L\mu} = i^L(-1)^{1+J_i+J_f}(2j+1)\sqrt{(2L+1)(2J_f+1)}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} J_f & J_f & L \\ j & j & J_i \end{Bmatrix}D^{(L)}_{0\mu}(\mathbf{n}). \quad (48,19)$$

Возникают моменты лишь четного порядка (это — тоже следствие упоминавшегося уже сохранения четности).

Если вторичное ядро в свою очередь излучает, то, будучи поляризованным, оно даст неизотропное распределение фотонов. Так как поляризационные моменты (48,19) зависят от направления $\mathbf{n}$ фотона, испущенного при первом распаде, возникает определенная корреляция между направлениями последовательно испущенных фотонов (при неполяризованном первичном ядре). Аналогичным образом могут быть рассмотрены и другие корреляционные явления при каскадных испусканиях (корреляция поляризаций и т. п.) [1]).

Задача

Связать поляризационные моменты $\mathcal{P}_{1\mu}$ и $\mathcal{P}_{2\mu}$ со средними значениями вектора момента $\mathbf{J}$ и тензора квадрупольного момента Q_{ik}.

Решение. Приведенные элементы вектора $\mathbf{J}$ и тензора Q_{ik} определяются из равенств

$$\overline{\mathbf{J}^2} = \frac{\langle J\|J\|J\rangle^2}{2J+1}, \qquad \overline{Q^2_{ik}} = \frac{\langle J\|Q\|J\rangle^2}{2J+1}$$

[1]) Подробное изложение этих вопросов можно найти в статье *А. З. Долгинова* в книге «Гамма-лучи» (изд-во АН СССР, 1961).

(ср. III (107,10—11)). Оператор $\hat{Q}_{ik}$ выражается через операторы момента формулой III (75,2):

$$\hat{Q}_{ik}=\frac{3Q}{2J(2J-1)}\left(\hat{J}_i\hat{J}_k+\hat{J}_k\hat{J}_i-\frac{2}{3}\hat{\mathbf{J}}^2\delta_{ik}\right).$$

Отсюда находим среднее значение

$$\overline{Q_{ik}^2}=\frac{3Q^2}{2J^2(2J-1)^2}\mathbf{J}^2(4\mathbf{J}^2-3)=Q^2\frac{3(J+1)(2J+3)}{2J(2J-1)}.$$

Приведенные матричные элементы:

$$\langle J\|J\|J\rangle=\sqrt{J(J+1)(2J+1)},$$

$$\langle J\|Q\|J\rangle=Q\sqrt{\frac{3(2J+1)(J+1)(2J+3)}{2J(2J-1)}}.$$

Из (48,14) видно теперь, что поляризационные моменты $\mathcal{P}_{1\mu}$ совпадают со сферическими компонентами вектора

$$\sqrt{\frac{3}{J(J+1)}}\,\overline{\mathbf{J}},$$

а моменты $\mathcal{P}_{2\mu}$ — со сферическими компонентами тензора

$$\sqrt{\frac{10J(2J-1)}{3(J+1)(2J+3)}}\,\frac{\overline{Q_{ik}}}{Q}.$$

§ 49. Излучение атомов. Электрический тип [1]

Энергии внешних электронов атома (принимающих участие в оптических радиационных переходах) в грубой оценке имеют порядок величины $E\sim me^4/\hbar^2$, так что излучаемые длины волн $\lambda\sim\hbar c/E\sim\hbar^2/\alpha me^2$. Размеры же атома $a\sim\hbar^2/me^2$. Поэтому в оптических спектрах атомов, как правило, выполняется неравенство $a/\lambda\sim\alpha\ll 1$. Такой же порядок величины имеет отношение $v/c\sim\alpha$, где v — скорости оптических электронов.

Таким образом, в оптических спектрах атомов выполняется условие, в силу которого вероятность электрического дипольного излучения (если оно допускается правилами отбора) значительно превосходит вероятности мультипольных переходов [2]. В связи с этим в спектроскопии атомов наиболее важную роль играют именно электрические дипольные переходы.

---

[1]) В § 49—51, 53—55 пользуемся обычными единицами.

[2]) Типичные значения вероятности дипольных переходов в оптической области спектра атомов имеют порядок 10^8 с$^{-1}$.