элемент магнитного момента: $\langle nJ\|\mu\|nJ\rangle$. Его значение можно написать сразу, если заметить, что полный (неприведенный) матричный элемент $\langle nJM|\mu_z|nJM\rangle$ как раз определяет расщепление данного уровня в эффекте Зеемана (см. III, § 113) и равен $-\mu_0 gM$, где g — множитель Ланде. Приведенный же матричный элемент (см. III (29,7))

$$\langle nJ\|\mu\|nJ\rangle=\frac{1}{M}\sqrt{J(J+1)(2J+1)}\,\langle nJM|\mu_z|nJM\rangle=$$
$$=-\mu_0 g\sqrt{J(J+1)(2J+1)}.$$

В результате находим для искомой вероятности[1])

$$w(nJIF\to nJI,\ F-1)=\frac{2F+1}{2F-1}\,w(nJI,\ F-1\to nJIF)=$$
$$=\frac{\omega^3\mu_0^2g^2}{3\hbar c^3(2F+1)F}(J+I+F+1)(J+I-F+1)(F+J-I)(F-J+I).$$

Это выражение отличается от (50,8) лишь очевидным изменением обозначений и лишним множителем g^2.

2. Найти вероятность $M1$-перехода между зеемановскими компонентами одного и того же атомного уровня.

Решение. Речь идет о переходе $M\to M-1$ при неизменных значениях nJ; частота перехода (см. ниже, (51,3)): $\hbar\omega=\mu_0 gH$ (g — фактор Ланде). Матричный элемент сферической компоненты μ_{-1} вектора $\boldsymbol{\mu}$:

$$\langle nJ,\ M-1|\mu_{-1}|nJM\rangle|=\sqrt{\frac{(J-M+1)(J+M)}{2J(J+1)(2J+1)}}\,|\langle nJ\|\mu\|nJ\rangle|=$$
$$=-\mu_0 g\sqrt{\frac{1}{2}(J-M+1)(J+M)}$$

(см. III (27,12) и предыдущую задачу). Вероятность перехода

$$w=\frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}|\langle nJ,\ M-1|\mu_{-1}|nJM\rangle|^2=\frac{2\mu_0^5H^3}{3\hbar^4c^3}(J-M+1)(J+M).$$

§ 51. Излучение атомов. Эффекты Зеемана и Штарка

Во внешнем магнитном поле H (которое предполагаем слабым) каждый атомный уровень с полным моментом J расщепляется на $2J+1$ уровней

$$E_M=E^{(0)}+\mu_0 gMH, \tag{51,1}$$

[1]) Интересный пример представляет переход между компонентами сверхтонкой структуры основного уровня атома водорода ($1s_{1/2}$), строго запрещенный не только как $E1$, но и как $E2$ (последнее — по правилу, запрещающему квадрупольный переход с $J+J'=1$). Этому переходу отвечает частота $\omega=2\pi\cdot 1{,}42\cdot 10^9$ с$^{-1}$ (длина волны $\lambda=21$ см). Положив $g=2$, $I=1/2$, $J=1/2$, $F=1$, $F'=0$, получим

$$w=\frac{4\omega^3\mu_0^2}{3\hbar c^3}=2{,}85\cdot 10^{-15}\ \text{с}^{-1}.$$

где $E^{(0)}$ — невозмущенный уровень, μ_0 — магнетон Бора, g — фактор Ланде, M — проекция момента J на направление поля (см. III, § 113). Вырождение по направлениям момента, таким образом, полностью снимается.

Соответственно расщепляются и спектральные линии, возникающие от переходов между двумя расщепленными уровнями. Число компонент линии определяется правилом отбора для числа M, согласно которому при дипольном излучении должно быть

$$m = M - M' = 0, \ \pm 1. \tag{51,2}$$

Дополнительно к этому правилу запрещены переходы с $M = M' = 0$, если при этом $J' = J$. Это непосредственно видно из общих выражений III (29,7) матричных элементов произвольного вектора.

Компоненты, возникающие от переходов с $m = 0, \pm 1$, называют соответственно π- и σ-компонентами. Их частоты:

$$\begin{aligned} \hbar\omega_\pi &= \hbar\omega^{(0)} + \mu_0 H (g - g') M, \\ \hbar\omega_\sigma &= \hbar\omega^{(0)} + \mu_0 H [gM - g'(M \pm 1)]. \end{aligned} \tag{51,3}$$

В частном случае, когда $g = g'$, имеем

$$\hbar\omega_\pi = \hbar\omega^{(0)}, \quad \hbar\omega_\sigma = \hbar\omega^{(0)} \mp \mu_0 g H, \tag{51,4}$$

независимо от значения M; другими словами, в этом случае линия расщепляется в триплет с несмещенной π-компонентой и симметрично расположенными по обе стороны от нее двумя σ-компонентами (так называемый *нормальный эффект Зеемана*).

Полная (по всем направлениям) вероятность излучения пропорциональна квадрату модуля $|\langle n'J'M'|d_{-m}|nJM\rangle|^2$. Поэтому, в силу формулы (46,19) с $j = 1$, относительная вероятность излучения каждой из зеемановских компонент спектральной линии равна

$$\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M' & m & -M \end{pmatrix}^2. \tag{51,5}$$

В частном случае нормального эффекта Зеемана имеется всего три компоненты, каждая из которых возникает от переходов со всех начальных M при заданном m. Поскольку

$$\sum_{MM'} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M' & m & -M \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{3} \tag{51,6}$$

(см. III (106,12)), в этом случае излучение всех трех компонент равновероятно.

Больший интерес представляет, однако, относительная интенсивность зеемановских компонент при наблюдении в определенном направлении (по отношению к направлению приложенного к источнику магнитного поля). Согласно (45,5) вероятность излучения (а с нею и интенсивность линии) в заданном направлении $\mathbf{n}$ пропорциональна $\sum |\mathbf{e}^*\mathbf{d}_{fi}|^2$, где суммирование производится по двум независимым поляризациям $\mathbf{e}$, возможным при данном $\mathbf{n}$.

При наблюдении вдоль поля (ось z) эта сумма есть

$$|(d_x)_{fi}|^2 + |(d_y)_{fi}|^2.$$

Переходя к сферическим компонентам, получаем

$$|(d_1)_{fi}|^2 + |(d_{-1})_{fi}|^2.$$

Это значит, что в продольном (по полю) направлении наблюдаются лишь две σ-компоненты ($m = \pm 1$). Их интенсивности пропорциональны

$$\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{pmatrix}^2. \tag{51,7}$$

Обладая определенными значениями проекции момента m вдоль направления распространения, эти линии имеют правую ($m = 1$) и левую ($m = -1$) круговые поляризации (см. § 8).

При наблюдении в перпендикулярном полю направлении (пусть это будет ось x) интенсивность пропорциональна сумме

$$|(d_z)_{fi}|^2 + |(d_y)_{fi}|^2 = |(d_0)_{fi}|^2 + \frac{1}{2}\{|(d_1)_{fi}|^2 + |(d_{-1})_{fi}|^2\}.$$

Таким образом, в поперечном направлении наблюдаются две σ-компоненты и π-компонента с интенсивностями, пропорциональными соответственно

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{pmatrix}^2 \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M & 0 & -M \end{pmatrix}^2 \tag{51,8}$$

(интенсивности σ-компонент вдвое меньше, чем при продольном наблюдении). При этом π-компонента поляризована линейно вдоль оси z, а σ-компоненты наблюдаются в этом направлении поляризованными линейно вдоль оси y.

Отметим, что относительные интенсивности зеемановских компонент целиком определяются начальными и конечными значениями J и M вне зависимости от других характеристик уровней.

Правила отбора запрещают электрически-дипольные переходы между зеемановскими компонентами одного и того же уровня, поскольку все они обладают одинаковой четностью. По той же причине, которая была указана в конце предыдущего параграфа для переходов между компонентами сверхтонкой структуры уровня, указанные переходы осуществляются как магнитно-дипольные. В силу правила отбора по числу M переходы происходят лишь между соседними компонентами ($M' - M = \pm 1$)[1]).

Расщепление уровней атома в слабом электрическом поле (*эффект Штарка*), в отличие от расщепления в магнитном поле, не приводит к полному снятию вырождения по направлениям момента. Все уровни, за исключением уровней с $M = 0$, остаются двукратно вырожденными: к каждому относятся два состояния с проекциями момента M и $-M$.

Вычисление относительных интенсивностей штарковских компонент спектральной линии аналогично изложенному выше для эффекта Зеемана[2]). При этом надо иметь в виду, что в интенсивность π-компонент дают вклад (при $M \neq 0$) переходы $M \to M$ и $-M \to -M$, а в интенсивности σ-компонент — переходы $M \to M \pm 1$ и $-M \to -(M \pm 1)$. Поэтому, например, при поперечном наблюдении эффекта интенсивности π-компонент пропорциональны

$$2\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M & 0 & -M \end{pmatrix}^2,$$

а интенсивности σ-компонент пропорциональны суммам

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \pm 1 & \mp 1 & -M \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M \mp 1 & \pm 1 & M \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \pm 1 & \mp 1 & -M \end{pmatrix}^2$$

(напомним, что при изменении знака всех чисел второй строки $3j$-символы могут лишь изменить знак, так что их квадраты не меняются).

Во внешнем, даже слабом поле полный момент **J**, строго говоря, перестает сохраняться; в однородном поле соблюдается точно лишь сохранение проекции момента M. Поэтому и при радиационных переходах в слабом поле сохранение момента становится не строго обязательным, и в спектре атомов могут появиться линии, запрещенные обычными правилами отбора.

Вычисление интенсивностей этих линий сводится к вычислению поправок в матрице дипольного момента, что в свою очередь требует определения поправок к волновым функциям ста-

---

[1]) Эти переходы обычно имеют частоты в сантиметровом диапазоне и наблюдаются в поглощении и вынужденном испускании (электронный парамагнитный резонанс): поглощающие атомы находятся в сильном постоянном магнитном поле (производящем зеемановское расщепление) и слабом радиочастотном поле резонансной частоты.

[2]) Мы имеем здесь в виду квадратичный эффект Штарка, свойственный всем атомам, за исключением водорода (см. III, § 76). Поле предполагается настолько слабым, что вызываемое им расщепление уровней мало по сравнению даже с интервалами тонкой структуры.

ционарных состояний. В первом приближении теории возмущений (по слабому внешнему полю) в волновой функции появляются «примеси» состояний, соединенных с исходным отличными от нуля матричными элементами возмущения ($-\mathbf{Ed}$ в электрическом поле): добавка некоторого состояния ψ_2 к состоянию ψ_1 есть

$$\frac{-\mathbf{Ed}_{21}}{E_1 - E_2}\psi_2.$$

В результате в матричном элементе «запрещенного» перехода появится член

$$\frac{-(\mathbf{Ed}_{21})\,\mathbf{d}_{32}}{E_1 - E_2},$$

отличный от нуля, если разрешены переходы из «промежуточного» состояния 2 в начальное и конечное состояния 1 и 3.

§ 52. Излучение атомов. Атом водорода

Атом водорода представляет единственный случай, в котором вычисление матричных элементов перехода может быть произведено до конца в аналитическом виде (*W. Gordon*, 1929).

Четность состояния атома водорода равна $(-1)^l$, т. е. однозначно определяется орбитальным моментом электрона (напомним, что число l как определяющее четность состояния сохраняет свой смысл и для точных релятивистских волновых функций, т. е. при учете спин-орбитального взаимодействия). Поэтому правило отбора по четности строго запрещает электрически-дипольные переходы без изменения l; возможны лишь переходы с $l \to l \pm 1$. Изменения же главного квантового числа n не ограничены.

Дипольный момент атома водорода сводится к радиус-вектору электрона: $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$. Поскольку волновая функция электрона в атоме водорода представляет собой произведение угловой части и радиальной функции R_{nl}, приведенные матричные элементы радиус-вектора тоже представляются в виде произведения

$$\langle n', l-1 \| r \| nl \rangle = \langle l-1 \| \nu \| l \rangle \int_0^\infty R_{n', l-1} r R_{nl} r^2\, dr,$$

где $\langle l-1 \| \nu \| l \rangle$ — приведенные матричные элементы единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$ в направлении $\mathbf{r}$. Последние равны

$$\langle l-1 \| \nu \| l \rangle = \langle l \| \nu \| l-1 \rangle^* = i\sqrt{l}$$

(см. III (29,14)). Таким образом,

$$\langle n', l-1 \| r \| nl \rangle = -\langle nl \| r \| n', l-1 \rangle = i\sqrt{l}\int_0^\infty R_{n', l-1} R_{nl} r^3\, dr. \tag{52,1}$$