Решение. Сечение захвата на K-оболочку (главное квантовое число $n=1$) получается подстановкой (56,14) в (56,15):

$$\sigma_1^{\text{рек}} = \frac{2^7\pi}{3} Z^5 \alpha^3 a_0^2 \left(\frac{I_0}{\varepsilon}\right)^{5/2}$$

($\varepsilon = mv^2/2$ — энергия падающего электрона; $\hbar\omega \approx \varepsilon$). Из других состояний образующегося атома существенны лишь s-состояния: при вычислении матричного элемента в борновском приближении существенны значения волновой функции связанного состояния при малых r (как это будет видно из вычислений в § 57), а при $l > 0$ эти значения малы по сравнению со значениями функций с $l = 0$; при этом достаточно учитывать два первых члена разложения ψ по степеням r. Для состояний с $l = 0$ и произвольным n эти члены

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a^{3/2} n^{3/2}}\left(1 - \frac{r}{a}\right),$$

т. е. содержат n лишь в виде общего множителя $n^{-3/2}$ (написанное выражение получается разложением функции III (36,13)). Поэтому полное сечение рекомбинации

$$\sigma^{\text{рек}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{\text{рек}} = \sigma_1^{\text{рек}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3)\, \sigma_1^{\text{рек}}$$

(значение ζ-функции: $\zeta(3) = 1{,}202$).

§ 57. Фотоэффект. Релятивистский случай

Обратимся к случаю

$$\omega \gg I. \tag{57,1}$$

При этом также $\varepsilon = \omega - I \gg I$, и потому влияние кулонова поля ядра на волновую функцию фотоэлектрона (ψ') может быть учтено с помощью теории возмущений. Пишем ψ' в виде

$$\psi' = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(u' e^{i\mathbf{pr}} + \psi^{(1)}\right). \tag{57,2}$$

Фотоэлектрон может быть релятивистским; поэтому невозмущенная функция в (57,2) написана в виде релятивистской плоской волны (23,1).

Хотя в начальном состоянии электрон нерелятивистский, в его волновой функции ψ тем не менее должна быть (по выясняющимся ниже причинам) учтена релятивистская поправка ($\sim Ze^2$). Такая функция дается формулой (см. задачу к § 39)

$$\psi = \left(1 - \frac{i}{2m}\gamma^0 \boldsymbol{\gamma}\nabla\right)\frac{u}{\sqrt{2m}}\psi_{\text{нр}}, \tag{57,3}$$

где $\psi_{\text{нр}}$ — нерелятивистская функция связанного состояния (56,6), а u — биспинорная амплитуда покоящегося электрона, нормированная принятым нами условием $\bar{u}u = 2m$.

Подставим функции (57,2—3) в матричный элемент (56,2)[1]:

$$M_{fi}=\frac{1}{2\sqrt{m\varepsilon}}\int\left\{\bar{u}'(\gamma e)\left[\left(1-\frac{i}{2m}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\nabla\right)u\psi_{\text{нр}}\right]e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{r}}+\right.$$
$$\left.+\bar{\psi}^{(1)}(\gamma e)\,e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}u\psi_{\text{нр}}\right\}d^3x. \qquad (57,4)$$

Имея в виду получить первый член разложения этой величины по Ze^2, мы можем во втором члене в фигурных скобках заменить $\psi_{\text{нр}}$ просто постоянной $(Ze^2m)^{3/2}/\sqrt{\pi}$. Первый же член в результате такой замены обратился бы (при $\mathbf{p}-\mathbf{k}\neq 0$) в нуль (именно поэтому в ψ необходимо учитывать также и первую релятивистскую поправку, пропорциональную Ze^2; при $v\sim 1$ эта поправка дает вклад в сечение того же порядка, что и следующий член разложения $\psi_{\text{нр}}$ по Ze^2).

В первом члене в (57,4) производим интегрирование по частям, переводя действие оператора ∇ с $\psi_{\text{нр}}$ на экспоненциальный множитель. В результате получим

$$M_{fi}=\frac{(Ze^2m)^{3/2}}{2(\pi m\varepsilon)^{1/2}}\left\{\bar{u}'(\gamma e)\left[1+\frac{1}{2m}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\right]u\left(e^{-Ze^2mr}\right)_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}+\right.$$
$$\left.+\bar{\psi}^{(1)}_{-\mathbf{k}}(\gamma e)\,u\right\}, \qquad (57,5)$$

где векторный индекс означает пространственную компоненту Фурье. С точностью до члена $\sim Ze^2$[2])

$$\left(e^{-Ze^2mr}\right)_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}=\frac{8\pi Ze^2m}{(\mathbf{p}-\mathbf{k})^4}. \qquad (57,6)$$

---

[1]) Функция (57,3) была получена для расстояний $r\sim 1/mZe^2$, на которых поправочный член в ней относительного порядка величины Ze^2. Но для основного состояния (а также и для всех вообще s-состояний) формула (57,3) пригодна для любых r, поскольку производная от чисто экспоненциальной функции (56,6) (а с нею и поправочный член в (57,3)) всегда пропорциональна Ze^2. Это обстоятельство позволяет воспользоваться формулой (57,3) в рассматриваемой задаче, в которой существенны малые r. (При $v\sim 1$ существенны $r\sim 1/m$.)

[2]) Взяв компоненту Фурье от обеих сторон равенства

$$(\Delta-\lambda^2)\frac{e^{-\lambda r}}{r}=-4\pi\delta(\mathbf{r}),$$

получим

$$\left(\frac{e^{-\lambda r}}{r}\right)_{\mathbf{q}}=\frac{4\pi}{\mathbf{q}^2+\lambda^2}. \qquad (57,6\text{а})$$

Дифференцирование этого выражения по параметру λ дает

$$\left(e^{-\lambda r}\right)_{\mathbf{q}}=\frac{8\pi\lambda}{(\mathbf{q}^2+\lambda^2)^2}. \qquad (57,6\text{б})$$

Для вычисления же компоненты Фурье $\psi_{\mathbf{k}}^{(1)}$ пишем уравнение, которому удовлетворяет функция $\psi^{(1)}$:

$$(\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla - m)\,\psi^{(1)} = e\,(\gamma^\mu A_\mu)\,u' e^{i\mathbf{pr}} = -\frac{Ze^2}{r}\gamma^0 u' e^{i\mathbf{pr}}$$

(оно получается подстановкой (57,2) в (32,1)). Применив к обеим сторонам этого уравнения оператор $(\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla + m)$, получим

$$(\Delta + \mathbf{p}^2)\,\psi^{(1)} = -Ze^2(\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla + m)(\gamma^0 u')\frac{1}{r}e^{i\mathbf{pr}}.$$

Умножим это уравнение на $e^{-i\mathbf{kr}}$ и проинтегрируем по d^3x, причем в членах с Δ и ∇ производим обычным образом интегрирование по частям:

$$(\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2)\,\psi_{\mathbf{k}}^{(1)} = -Ze^2(\gamma^0\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{k} + m)(\gamma^0 u')\left(\frac{1}{r}\right)_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} =$$

$$= -Ze^2(2\varepsilon\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}-\mathbf{p}))(\gamma^0 u')\frac{4\pi}{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}.$$

В последней строке учтено, что амплитуда u' удовлетворяет уравнению

$$(\varepsilon\gamma^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} - m)\,u' = 0, \quad \text{или} \quad (\varepsilon\gamma^0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} - m)\,\gamma^0 u' = 0.$$

Отсюда находим

$$\bar{\psi}_{-\mathbf{k}}^{(1)} = \psi_{\mathbf{k}}^{(1)*}\gamma^0 = 4\pi Ze^2\bar{u}'\frac{2\varepsilon\gamma^0 + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}-\mathbf{p})}{(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2)(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}\gamma^0. \tag{57,7}$$

Подставив (57,6—7) в матричный элемент (57,5), представим его в виде

$$M_{fi} = \frac{4\pi^{1/2}(Ze^2m)^{5/2}}{(\varepsilon m)^{1/2}(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}\bar{u}' A u,$$

где

$$A = a(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{e}) + (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{e})\gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{b}) + (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{c})\gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{e}),$$

$$a = \frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2} + \frac{\varepsilon}{m}\frac{1}{\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2}, \quad \mathbf{b} = -\frac{\mathbf{k}-\mathbf{p}}{2m(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}, \quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{k}-\mathbf{p}}{2m(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2)}.$$

Сечение

$$d\sigma = \frac{8e^2(Ze^2m)^5|\mathbf{p}|}{\omega(\mathbf{k}-\mathbf{p})^4 m}(\bar{u}' A u)(\bar{u}\bar{A}u')\,do,$$

где $\bar{A} = \gamma^0 A^+ \gamma^0$ (см. § 65). Это выражение надо еще просуммировать по конечным и усреднить по начальным направлениям спина электрона. Эти действия производятся по описанным ниже, в § 65, правилам с помощью поляризационных матриц плотности начального и конечного состояний:

$$\rho = \frac{m}{2}(\gamma^0 + 1), \quad \rho' = \frac{1}{2}(\gamma^0\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + m)$$

(в начальном состоянии $\mathbf{p}=0$, $\varepsilon=m$). Они приводят к выражению

$$d\sigma=\frac{16e^2(Ze^2m)^5|\mathbf{p}|}{m\omega(\mathbf{k}-\mathbf{p})^4}\,\mathrm{Sp}\,(\rho' A\rho\bar{A})\,do.$$

Вычисление следа (с использованием формул (22,22)) представляет собой чисто алгебраическую операцию и приводит к следующему результату:

$$\mathrm{Sp}\,(\rho' A\rho\bar{A})=\frac{m}{\varepsilon+m}\,[a\mathbf{p}-(\mathbf{b}-\mathbf{c})(\varepsilon+m)]^2+$$
$$+4m(\mathbf{be})[(\varepsilon+m)(\mathbf{ce})+a(\mathbf{pe})]$$

(вектор $\mathbf{e}$ предполагается вещественным — линейная поляризация фотона).

Придадим формуле сечения фотоэффекта окончательный вид, введя полярный угол θ и азимут φ направления $\mathbf{p}$ относительно направления $\mathbf{k}$ в качестве оси z и плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{e}$ в качестве плоскости xz (так что $\mathbf{pe}=|\mathbf{p}|\cos\varphi\sin\theta$). При $\omega\gg I$ сохранение энергии можно записать в виде $\varepsilon-m=\omega$ (вместо $\varepsilon-m=\omega-I$). Легко проверить, что тогда

$$\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2=-2m(\varepsilon-m),\quad (\mathbf{k}-\mathbf{p})^2=2\varepsilon(\varepsilon-m)(1-v\cos\theta),$$

где $\mathbf{v}=\mathbf{p}/\varepsilon$ — скорость фотоэлектрона. После простых преобразований получим окончательно

$$d\sigma=Z^5\alpha^4r_e^2\frac{v^3(1-v^2)^3\sin^2\theta}{\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)^5(1-v\cos\theta)^4}\times$$
$$\times\left\{\frac{\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)^2}{2(1-v^2)^{3/2}}(1-v\cos\theta)+\right.$$
$$\left.+\left[2-\frac{\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)(1-v\cos\theta)}{1-v^2}\right]\cos^2\varphi\right\}do,\qquad(57,8)$$

где $r_e=e^2/m$.

В ультрарелятивистском случае ($\varepsilon\gg m$) сечение фотоэффекта имеет резкий максимум при малых углах $\left(\theta\sim\sqrt{1-v^2}\right)$, т. е. электроны испускаются преимущественно в направлении падения фотона. Вблизи максимума пишем

$$1-v\cos\theta\approx\frac{1}{2}[(1-v^2)+\theta^2],$$

и главные члены в (57,8) дают

$$d\sigma\approx 4Z^5\alpha^4r_e^2\frac{(1-v^2)^{1/2}\theta^3}{(1-v^2+\theta^2)^3}\,d\theta\,d\varphi.\qquad(57,9)$$

Элементарное, хотя и довольно длинное интегрирование выражения (57,8) по углам приводит к следующей формуле для полного сечения (*F. Sauter*, 1931):

$$\sigma = 2\pi Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{(\gamma^2-1)^{3/2}}{(\gamma-1)^5}\left\{\frac{4}{3}+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma(\gamma-2)}{\gamma+1}\left(1-\frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma^2-1}}\ln\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}}\right)\right\}, \quad (57,10)$$

где для краткости введен «лоренцев множитель»

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\varepsilon}{m} \approx \frac{m+\omega}{m}. \quad (57,11)$$

В ультрарелятивистском случае эта формула сводится к простому выражению

$$\sigma = 2\pi Z^5\alpha^4 r_e^2/\gamma. \quad (57,12)$$

В случае же $I \ll \omega \ll m$ переход в (57,10) к пределу малых $\gamma - 1$ приводит к известному уже нам результату (56,14).

§ 58. Фоторасщепление дейтрона

Характерной особенностью дейтрона является малость его энергии связи (по сравнению с глубиной потенциальной ямы). Это обстоятельство позволяет описывать присходящие с участием дейтрона реакции без детального знания хода ядерных сил, с помощью одной лишь энергии связи (см. III, § 133). При этом предполагается, что длины волн сталкивающихся частиц велики по сравнению с радиусом действия ядерных сил a.

Это относится и к расщеплению дейтрона γ-квантами, для которых $ka \ll 1$. Предполагается также, что и $pa \ll 1$, где $\mathbf{p}$ — импульс относительного движения освободившихся нейтрона и протона (это условие более сильное, чем предыдущее[1])).

Исходим из нерелятивистской формулы для сечения фотоэффекта (56,5), проинтегрировав ее по направлениям:

$$\sigma = \frac{e^2 p}{2\pi\omega}\frac{M}{2}\frac{4\pi}{3}|(\mathbf{v}_p)_{fi}|^2.$$

Здесь $\mathbf{p}$ — импульс относительного движения протона и нейтрона[2]), а m в (56,5) заменено их приведенной массой $M/2$ (где M — масса нуклона). Матричный элемент берется от скорости протона $\mathbf{v}_p$, поскольку лишь протон взаимодействует с фотоном. Выразив $\mathbf{v}_p$ через импульс $\mathbf{p}$ ($\mathbf{v}_p = \mathbf{v}/2 = \mathbf{p}/M$), получим

$$\sigma^{(э)} = \frac{e^2 p}{3M\omega}|\mathbf{p}_{fi}|^2. \quad (58,1)$$

[1]) Энергия фотона, при которой $pa \approx 1$ ($a = 1{,}5\cdot 10^{-13}$ см), составляет 15 МэВ.

[2]) В этом параграфе p обозначает $|\mathbf{p}|$.