ГЛАВА VII

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

§ 64. Амплитуда рассеяния

Общая постановка задачи о столкновениях состоит в том, чтобы по заданному начальному состоянию системы (некоторая совокупность свободных частиц) найти вероятности различных возможных конечных состояний (другие совокупности свободных частиц). Если символ $|i\rangle$ обозначает начальное состояние, то результат столкновения можно представить как суперпозицию

$$\sum_f |f\rangle\langle f|S|i\rangle, \tag{64,1}$$

где суммирование производится по различным возможным конечным состояниям $|f\rangle$. Коэффициенты этого разложения $\langle f|S|i\rangle$ (или в краткой записи S_{fi}) составляют *матрицу рассеяния*, или *S-матрицу*[1]). Квадраты $|S_{fi}|^2$ дают вероятности переходов в определенные состояния $|f\rangle$.

В отсутствие взаимодействия между частицами состояние системы не менялось бы, чему соответствовала бы единичная S-матрица (отсутствие рассеяния). Удобно всегда выделять эту единицу, представив матрицу рассеяния в виде

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi}, \tag{64,2}$$

где T_{fi} — новая матрица. Во втором члене выделена четырехмерная δ-функция, выражающая закон сохранения 4-импульса (P_i и P_f — суммы 4-импульсов всех частиц в начальном и конечном состояниях); остальные множители введены для удобства в дальнейшем. В недиагональных матричных элементах первый член в (64,2) выпадает, так что для перехода $i \to f$ элементы матриц S и T связаны друг с другом соотношением

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi}. \tag{64,3}$$

Матричные элементы T_{fi}, остающиеся после выделения δ-функции, будем называть *амплитудами рассеяния*.

При возведении модулей $|S_{fi}|$ в квадрат появится квадрат δ-функции. Его надо понимать следующим образом. δ-функция

[1]) От английского слова scattering или немецкого Streuung.

возникает от интеграла

$$\delta^{(4)}(P_f - P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(P_f - P_i)x} d^4x. \qquad (64,4)$$

Если же вычислять другой такой же интеграл при $P_f = P_i$ (в силу наличия уже одной δ-функции), причем распространить интегрирование по некоторому большому, но конечному объему V и интервалу времени t, то получится $Vt/(2\pi)^4$ [1]). Поэтому можно написать

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 Vt.$$

Разделив на t, получим вероятность перехода в единицу времени

$$w_{i\to f} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V. \qquad (64,5)$$

Каждая из свободных частиц (начальных и конечных) описывается своей волновой функцией — плоской волной с некоторой амплитудой u (для электрона это — биспинор, для фотона — 4-вектор и т. п.). Амплитуда рассеяния T_{fi} имеет структуру вида

$$T_{fi} = u_1^* u_2^* \ldots Q u_1 u_2 \ldots, \qquad (64,6)$$

где слева стоят амплитуды волновых функций конечных, а справа — начальных частиц; Q есть некоторая матрица (по отношению к индексам компонент амплитуд всех частиц).

Наиболее важны случаи, когда в начальном состоянии имеется всего одна или две частицы. В первом случае речь идет о распаде, во втором — о столкновении двух частиц.

Рассмотрим сначала распад частицы на произвольное число других частиц с импульсами $\mathbf{p}'_a$ в элементе импульсного пространства $\prod d^3p'_a$ (индекс a нумерует частицы в конечном состоянии, так что $\sum \mathbf{p}'_a = \mathbf{P}_f$). Число состояний, приходящихся на этот элемент (и на нормировочный объем V [2])), есть

$$\prod_a \frac{Vd^3p'_a}{(2\pi)^3}.$$

---

[1]) Это можно показать иначе, вычислив сначала интеграл по каждой из координат в (64,4) в конечных пределах и затем устремив пределы к бесконечности с помощью формулы III (42,4):

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{\sin^2 \alpha\xi}{\xi\alpha^2} = \pi\delta(\alpha).$$

[2]) Для большей наглядности вычислений в этом параграфе не будем полагать нормировочный объем равным единице.

На эту величину надо умножить выражение (64,5):

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V \prod_a \frac{V d^3 p'_a}{(2\pi)^3}. \qquad (64,7)$$

При этом волновые функции всех частиц, используемые при вычислении матричного элемента, должны быть нормированы на одну частицу в объеме V. Так, для электрона это — плоская волна (23,1), для частицы со спином 1 — (14,12), для фотона — (4,3). Все эти функции содержат множитель $1/\sqrt{2\varepsilon V}$, где ε — энергия частицы. Однако в дальнейшем будет удобным условиться писать во всех вычислениях волновые функции частиц без этих множителей (которые включим в выражение для вероятности). Таким образом, электронная плоская волна будет

$$\psi = u e^{-ipx}, \quad \bar{u}u = 2m, \qquad (64,8)$$

а фотонная волна

$$A = \sqrt{4\pi}\, e e^{-ikx}, \quad ee^* = -1, \; ek = 0. \qquad (64,9)$$

Вычисленную с такими функциями амплитуду рассеяния обозначим (в отличие от T_{fi}) M_{fi}. Очевидно, что

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{(2\varepsilon_1 V \ldots 2\varepsilon'_1 V \ldots)^{1/2}}; \qquad (64,10)$$

в знаменателе стоит по одному множителю $\sqrt{2\varepsilon V}$ на каждую начальную или конечную частицу.

В частности, для вероятности распада получим вместо (64,7)

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \frac{1}{2\varepsilon} \prod_a \frac{d^3 p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}, \qquad (64,11)$$

где ε — энергия распадающейся частицы; нормировочный объем, как и должно быть, из этой формулы выпал [1]).

Придадим формуле (64,11) более законченный вид (устранив в ней δ-функции) для случая, когда распад происходит на две частицы (с импульсами $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$ и энергиями ε'_1, ε'_2). В системе покоя распадающейся частицы $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 \equiv \mathbf{p}'$, $\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 = m$, так что имеем

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^2} |M_{fi}|^2 \frac{1}{2m} \frac{1}{4\varepsilon'_1\varepsilon'_2} \delta(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2)\, \delta(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - m)\, d^3p'_1 d^3p'_2.$$

[1]) Если среди конечных частиц имеется N тождественных, то при интегрировании по их импульсам (с целью нахождения интегральной вероятности) должен быть введен множитель $1/N!$, учитывающий тождественность состояний, различающихся перестановкой частиц.

Первая δ-функция устраняется интегрированием по $d^3p'_2$; дифференциал же $d^3p'_1$ переписываем в виде

$$d^3p' = \mathbf{p}'^2 d|\mathbf{p}'|\,do = |\mathbf{p}'|\,do\,\frac{\varepsilon'_1\varepsilon'_2 d(\varepsilon'_1+\varepsilon'_2)}{\varepsilon'_1+\varepsilon'_2} \qquad (64,12)$$

(в справедливости этой записи легко убедиться, заметив, что $\varepsilon_1'^2 - m_1'^2 = \varepsilon_2'^2 - m_2'^2 = \mathbf{p}'^2$). Интегрирование по $d(\varepsilon'_1+\varepsilon'_2)$ устраняет вторую δ-функцию, и получается

$$dw = \frac{1}{32\pi^2 m^2}|M_{fi}|^2 |\mathbf{p}'|\,do'. \qquad (64,13)$$

Рассмотрим теперь столкновение двух частиц (с импульсами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ и энергиями ε_1 и ε_2) с превращением их в совокупность произвольного числа частиц с импульсами $\mathbf{p}'_a$. Вместо (64,11) получим теперь

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)\,|M_{fi}|^2 \frac{1}{4\varepsilon_1\varepsilon_2 V}\prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}.$$

Интересующей нас величиной в этом случае является, однако, не вероятность, а сечение $d\sigma$. Инвариантное (относительно преобразований Лоренца) сечение получается из dw делением на величину

$$j = \frac{I}{V\varepsilon_1\varepsilon_2}, \qquad (64,14)$$

где I обозначает 4-скаляр

$$I = \sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2} \qquad (64,15)$$

(см. II, § 12) [1]. В системе центра инерции ($\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$)

$$I = |\mathbf{p}|(\varepsilon_1+\varepsilon_2), \qquad (64,16)$$

так что

$$j = \frac{|\mathbf{p}|}{V}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \frac{v_1+v_2}{V}, \qquad (64,17)$$

что совпадает с обычным определением плотности потока сталкивающихся частиц (v_1, v_2 — их скорости) [2]. Таким образом,

---

[1]) На будущее выпишем также выражение для I в виде

$$I^2 = {}^1/_4\,[s-(m_1+m_2)^2]\,[s-(m_1-m_2)^2], \qquad (64,15а)$$

где $s = (p_1+p_2)^2$.

[2]) В произвольной системе отсчета

$$j = (1/V)\sqrt{(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2]^2}.$$

Это выражение сводится к обычной плотности потока во всех случаях, когда $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$: $j = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|/V$.

находим для сечения формулу

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)} (P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}. \qquad (64,18)$$

Придадим этой формуле окончательный вид, исключив из нее δ-функцию для случая, когда в конечном состоянии тоже имеется всего две частицы. Будем рассматривать процесс в системе центра инерции. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$ — полная энергия; $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 \equiv \mathbf{p}'$ — начальный и конечный импульсы. Устранение δ-функции производится так же, как и при выводе (64,13), и получается

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} |M_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|\,\varepsilon^2}\, do' \qquad (64,19)$$

(в частном случае упругого рассеяния, когда род частиц при столкновении не меняется, $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$).

Перепишем эту формулу еще и в другом виде, введя в нее инвариантную величину

$$t \equiv (p_1 - p'_1)^2 = m_1^2 + m_1'^2 - 2(p_1 p'_1) = \\ = m_1^2 + m_1'^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon'_1 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}'_1|\cos\theta, \qquad (64,20)$$

где θ — угол между $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}'_1$. В системе центра инерции импульсы $|\mathbf{p}_1| \equiv |\mathbf{p}|$ и $|\mathbf{p}'_1| \equiv |\mathbf{p}'|$ определяются одной только полной энергией ε, и при заданном ε

$$dt = 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|\,d\cos\theta. \qquad (64,21)$$

Поэтому в (64,19) можно заменить

$$do' = -d\varphi\, d\cos\theta = \frac{d\varphi\, d(-t)}{2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|},$$

где φ — азимут $\mathbf{p}'_1$ относительно $\mathbf{p}_1$ [1]). Таким образом,

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} |M_{fi}|^2 \frac{dt}{I^2} \frac{d\varphi}{2\pi} \qquad (64,22)$$

(мы снова ввели инвариант I согласно (64,16)). Азимут φ, а с ним и сечение в форме (64,22) инвариантны относительно преобразований Лоренца, не меняющих направление относительного движения частиц. Если сечение не зависит от азимута, формула (64,22) принимает особенно простой вид

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} |M_{fi}|^2 \frac{dt}{I^2}. \qquad (64,23)$$

---

[1]) Поскольку правильный знак дифференциала в подобных случаях очевиден, будем ниже для простоты писать dt вместо $d(-t)$ и т. п.

Если одна из сталкивающихся частиц достаточно тяжела (и ее состояние в результате столкновения не меняется), то ее роль в процессе сводится к роли неподвижного источника постоянного поля, в котором рассеивается другая частица. В соответствии с тем, что в постоянном поле сохраняется энергия (но не импульс!) системы, при такой трактовке процесса столкновения представим элементы S-матрицы в виде

$$S_{fi} = i2\pi\delta(E_f - E_i)\, T_{fi}. \tag{64,24}$$

В выражении для $|S_{fi}|^2$ квадрат одномерной δ-функции должен пониматься как

$$[\delta(E_f - E_i)]^2 \to \frac{1}{2\pi}\delta(E_f - E_i)\, t.$$

Перейдя затем (как и при выводе (64,11)) к амплитуде M_{fi} вместо T_{fi}, получим следующее выражение для вероятности процесса, в котором одна частица, рассеиваясь в постоянном поле, создает в конечном состоянии некоторое число других частиц:

$$dw = 2\pi\delta(E_f - \varepsilon)\,|M_{fi}|^2 \frac{1}{2\varepsilon V} \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3\, 2\varepsilon'_a}.$$

Здесь снова $\varepsilon\,(=E_i)$ — энергия начальной частицы, $\mathbf{p}'_a$ и ε'_a — импульсы и энергии конечных частиц. Сечение же рассеяния получится делением dw на плотность потока $j = v/V$, где $v = |\mathbf{p}|/\varepsilon$ — скорость рассеиваемой частицы. В результате нормировочный объем снова выпадает из ответа и получается

$$d\sigma = 2\pi\delta(E_f - \varepsilon)\,|M_{fi}|^2 \frac{1}{2\,|\mathbf{p}|} \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3\, 2\varepsilon'_a}. \tag{64,25}$$

В частном случае упругого рассеяния в конечном состоянии имеется тоже одна частица с тем же (по величине) импульсом и той же энергией. Заменив $d^3p' \to \mathbf{p}'^2 d|\mathbf{p}'|\,do' = |\mathbf{p}'|\,\varepsilon' d\varepsilon'\, do'$ и устранив $\delta(\varepsilon' - \varepsilon)$ интегрированием по $d\varepsilon'$, получим сечение в виде

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2}\,|M_{fi}|^2\, do'. \tag{64,26}$$

Наконец, если внешнее поле зависит от времени (скажем, поле системы частиц, совершающих заданное движение), то в S-матрице отсутствует также и δ-функция от энергии. Тогда $S_{fi} = iT_{fi}$ и после перехода от T_{fi} к M_{fi} согласно (64,10) вероятность, например, процесса, в котором поле рождает определенную совокупность частиц, будет даваться формулой

$$dw = |M_{fi}|^2 \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3\, 2\varepsilon'_a}. \tag{64,27}$$