§ 65. Реакции с поляризованными частицами

В этом параграфе мы покажем на простых примерах, каким образом учитывается при вычислении сечения рассеяния поляризационное состояние участвующих в реакции частиц.

Пусть в начальном и в конечном состояниях имеется по одному электрону. Тогда амплитуда рассеяния имеет вид

$$M_{fi} = \bar{u}' A u \left(\equiv \bar{u}'_i A_{ik} u_k\right), \tag{65,1}$$

где u и u' — биспинорные амплитуды начального и конечного электронов, A — некоторая матрица (зависящая от импульсов и поляризаций остальных участвующих в реакции частиц, если таковые имеются).

Сечение рассеяния пропорционально $|M_{fi}|^2$. Имеем

$$(\bar{u}' A u)^* = u' \gamma^{0*} A^* u^* = u^* A^+ \gamma^{0+} u',$$

или

$$(\bar{u}' A u)^* = \bar{u} \bar{A} u', \tag{65,2}$$

где [1])

$$\bar{A} = \gamma^0 A^+ \gamma^0.$$

Таким образом,

$$|M_{fi}|^2 = (\bar{u}' A u)(\bar{u} \bar{A} u') \equiv u'_i \bar{u}'_k A_{kl} u_l \bar{u}_m \bar{A}_{mi}. \tag{65,3}$$

Если начальный электрон находился в смешанном (частично поляризованном) состоянии с матрицей плотности ρ и если нас интересует сечение процесса с образованием конечного электрона в определенном наперед заданном поляризационном состоянии ρ', то надо заменить произведения компонент биспинорных амплитуд

$$u'_i \bar{u}'_k \to \rho'_{ik}, \quad u_l \bar{u}_m \to \rho_{lm}.$$

Тогда

$$|M_{fi}|^2 = \mathrm{Sp}\,(\rho' A \rho \bar{A}). \tag{65,4}$$

Матрицы плотности ρ и ρ' даются формулой (29,13)

$$\rho = \frac{1}{2}(\gamma p + m)\left[1 - \gamma^5 (\gamma a)\right] \tag{65,5}$$

(и аналогично для ρ').

Если начальный электрон не поляризован, то

$$\rho = \frac{1}{2}(\gamma p + m). \tag{65,6}$$

---

[1]) В связи с необходимостью образовывать матрицу $\bar{A}$ отметим для будущего следующие легко проверяемые равенства:

$$\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu, \quad \overline{\gamma^\mu \gamma^\nu \ldots \gamma^\rho} = \gamma^\rho \ldots \gamma^\nu \gamma^\mu, \quad \bar{\gamma}^5 = -\gamma^5, \quad \overline{\gamma^5 \gamma^\mu} = \gamma^5 \gamma^\mu. \tag{65,2a}$$

Подстановка этого выражения эквивалентна усреднению по поляризациям электрона. Если требуется определить сечение рассеяния с произвольной поляризацией конечного электрона, то надо положить также $\rho' = (\gamma p' + m)/2$ и удвоить результат; эта операция эквивалентна суммированию по поляризациям электрона. Таким образом, получим

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{поляр}} |M_{fi}|^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\{(\gamma p' + m)\,A\,(\gamma p + m)\,\bar{A}\}, \tag{65,7}$$

где $\sum\limits_{\text{поляр}}$ означает суммирование по начальным и конечным поляризациям, а множитель $^1/_2$ превращает одно из суммирований в усреднение.

Матрица плотности ρ' в (65,4) — вспомогательное понятие, характеризующее, по существу, свойства детектора (выделяющего ту или иную поляризацию конечного электрона), а не процесса рассеяния как такового. Возникает вопрос о поляризационном состоянии электрона, в которое он приводится процессом рассеяния самим по себе. Если $\rho^{(f)}$ — матрица плотности этого состояния, то вероятность детектирования электрона в состоянии ρ' получится проецированием $\rho^{(f)}$ на ρ', т. е. образованием следа $\mathrm{Sp}(\rho^{(f)}\rho')$. Этой же величине будет пропорционально соответствующее сечение, т. е. квадрат $|M_{fi}|^2$. Сравнив с (65,4), мы заключим, что

$$\rho^{(f)} \sim A\rho\bar{A}. \tag{65,8}$$

Поскольку заранее известно, что $\rho^{(f)}$ должно иметь вид (65,5) с некоторым 4-вектором $a^{(f)}$, дело сводится к определению последнего. Это можно было бы сделать по формуле (29,14), но еще проще поступить, как будет указано ниже.

Мы видели в § 29, что компоненты 4-вектора a выражаются через компоненты 3-вектора ζ — среднего (удвоенного) значения спина электрона в его системе покоя. Поляризационные состояния электронов полностью определяются этими векторами, и целесообразно выражать через них также и сечение рассеяния. Очевидно, что квадрат $|M_{fi}|^2$ будет линеен по каждому из векторов ζ и ζ', относящихся к начальному и конечному электронам. Как функция от ζ' он будет иметь вид

$$|M_{fi}|^2 = \alpha + \beta\zeta', \tag{65,9}$$

где α и β сами — линейные функции ζ.

Вектор ζ' в (65,9) — заданная поляризация конечного электрона, выделяемая детектором. Вектор же $\zeta^{(f)}$, отвечающий матрице плотности $\rho^{(f)}$, легко найти следующим образом. Согласно сказанному выше

$$|M_{fi}|^2 \sim \mathrm{Sp}\,(\rho'\rho^{(f)}).$$

Ввиду релятивистской инвариантности этой величины можно вычислять ее в любой системе отсчета. В системе покоя конечного электрона имеем согласно (29,20)

$$\rho'\rho^{(f)} \sim (1+\sigma\zeta')(1+\sigma\zeta^{(f)}).$$

Поэтому

$$|M_{fi}|^2 \sim 1+\zeta'\zeta^{(f)}$$

и, сравнив с (65,9), находим, что

$$\zeta^{(f)} = \beta/\alpha. \qquad (65,10)$$

Таким образом, вычислив сечение как функцию параметра ζ', мы тем самым определим и поляризацию $\zeta^{(f)}$.

В более сложных случаях (более чем по одному начальному или конечному электрону) вычисления производятся аналогичным образом по изложенной схеме.

Так, если в начале и конце имеется по два электрона, амплитуда рассеяния приобретает вид

$$M_{fi} = (\bar{u}_1' A u_1)(\bar{u}_2' B u_2) + (\bar{u}_2' C u_1)(\bar{u}_1' D u_2),$$

где u_1, u_2 — биспинорные амплитуды начальных, а u_1', u_2' — конечных электронов. При образовании квадрата $|M_{fi}|^2$ появятся члены вида

$$|\bar{u}_1' A u_1|^2 \, |\bar{u}_2' B u_2|^2$$

и вида

$$(\bar{u}_1' A u_1)(\bar{u}_2' B u_2)(\bar{u}_2' C u_1)^* (\bar{u}_1' D u_2)^*.$$

Первые приводятся к произведениям двух следов вида (65,4), а вторые — к следам вида

$$\mathrm{Sp}\,(\rho_1' A \rho_1 \bar{C} \rho_2' B \rho_2 \bar{D}).$$

Позитроны описываются амплитудами «отрицательной частоты» $u(-p)$. Для реакций с участием позитронов отличие от изложенного выше сводится к тому, что в качестве матриц плотности надо пользоваться выражениями, отличающимися от (65,5—6) лишь изменением знака перед m (ср. (29, 16—17)).

Обратимся к поляризационным состояниям участвующих в реакции фотонов.

Поляризация каждого начального фотона входит в амплитуду рассеяния линейно в виде 4-вектора e, а каждого конечного фотона — в виде e^*. В обоих случаях в сечение (т. е. квадрат $|M_{fi}|^2$) входит 4-тензор $e_\mu e_\nu^*$. Для перехода к случаю произвольного частично поляризованного состояния этот тензор должен быть заменен четырехмерной матрицей плотности —

4-тензором $\rho_{\mu\nu}$:

$$e_\mu e_\nu^* \to \rho_{\mu\nu}. \tag{65,11}$$

В частности, для неполяризованного фотона, согласно (8,15),

$$\rho_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}/2. \tag{65,12}$$

Таким образом, усреднение по поляризациям фотона сводится к тензорному свертыванию в $|M_{fi}|^2$ по соответствующим двум тензорным индексам $\mu\nu$ [1]).

Если требуется произвести не усреднение, а суммирование по поляризациям фотона, то надо заменить $e_\mu e_\nu^*$ вдвое бо́льшим выражением:

$$e_\mu e_\nu^* \to -g_{\mu\nu}. \tag{65,13}$$

Матрица плотности поляризованного фотона дается формулой (8,17). Выбор 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, фигурирующих в этом выражении, диктуется обычно конкретными условиями задачи. В одних случаях эти векторы могут быть связаны с определенными пространственными направлениями в некоторой системе отсчета. В других случаях более удобно связывать их с фигурирующими в условиях задачи характерными 4-векторами — 4-импульсами частиц.

В (8,17) поляризация фотона описывается параметрами Стокса, составляющими «вектор» $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Как и для электрона, необходимо отличать поляризацию $\xi^{(f)}$ конечного фотона как такового от поляризации ξ', выделяемой детектором. Если известен квадрат амплитуды рассеяния как функция параметра ξ':

$$|M_{fi}|^2 = \alpha + \beta\xi',$$

то поляризация $\xi^{(f)} = \beta/\alpha$, что аналогично формуле (65,10).

§ 66. Кинематические инварианты

Рассмотрим некоторые кинематические соотношения для процессов рассеяния, в которых как в начальном, так и в конечном состояниях имеется всего по две частицы. Мы имеем в виду соотношения, являющиеся следствием одних лишь общих законов сохранения и потому справедливые вне зависимости от природы частиц и от законов их взаимодействия.

Запишем закон сохранения 4-импульса в общем виде, не предрешающем, которые из импульсов относятся к начальным,

[1]) Выражение (65,12) как бы сводит усреднение по двум реально возможным поляризациям фотона к усреднению по четырем независимым направлениям 4-вектора e.