4-тензором $\rho_{\mu\nu}$:

$$e_\mu e_\nu^* \to \rho_{\mu\nu}. \tag{65,11}$$

В частности, для неполяризованного фотона, согласно (8,15),

$$\rho_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}/2. \tag{65,12}$$

Таким образом, усреднение по поляризациям фотона сводится к тензорному свертыванию в $|M_{fi}|^2$ по соответствующим двум тензорным индексам $\mu\nu$ [1]).

Если требуется произвести не усреднение, а суммирование по поляризациям фотона, то надо заменить $e_\mu e_\nu^*$ вдвое бо́льшим выражением:

$$e_\mu e_\nu^* \to -g_{\mu\nu}. \tag{65,13}$$

Матрица плотности поляризованного фотона дается формулой (8,17). Выбор 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, фигурирующих в этом выражении, диктуется обычно конкретными условиями задачи. В одних случаях эти векторы могут быть связаны с определенными пространственными направлениями в некоторой системе отсчета. В других случаях более удобно связывать их с фигурирующими в условиях задачи характерными 4-векторами — 4-импульсами частиц.

В (8,17) поляризация фотона описывается параметрами Стокса, составляющими «вектор» $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Как и для электрона, необходимо отличать поляризацию $\xi^{(f)}$ конечного фотона как такового от поляризации ξ', выделяемой детектором. Если известен квадрат амплитуды рассеяния как функция параметра ξ':

$$|M_{fi}|^2 = \alpha + \beta\xi',$$

то поляризация $\xi^{(f)} = \beta/\alpha$, что аналогично формуле (65,10).

§ 66. Кинематические инварианты

Рассмотрим некоторые кинематические соотношения для процессов рассеяния, в которых как в начальном, так и в конечном состояниях имеется всего по две частицы. Мы имеем в виду соотношения, являющиеся следствием одних лишь общих законов сохранения и потому справедливые вне зависимости от природы частиц и от законов их взаимодействия.

Запишем закон сохранения 4-импульса в общем виде, не предрешающем, которые из импульсов относятся к начальным,

[1]) Выражение (65,12) как бы сводит усреднение по двум реально возможным поляризациям фотона к усреднению по четырем независимым направлениям 4-вектора e.

а которые — к конечным частицам:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0. \qquad (66,1)$$

Здесь $\pm q_a$ — 4-векторы импульсов, причем два из них отвечают падающим частицам, а два — рассеянным; для последних импульсами являются — q_a. Другими словами, у двух из q_a временная компонента $q_a^0 > 0$, а у двух $q_a^0 < 0$.

Наряду с сохранением 4-импульса должен соблюдаться закон сохранения заряда. При этом под зарядом можно понимать не только электрический заряд, но и другие сохраняющиеся величины, имеющие разный знак у частиц и античастиц.

При заданных видах участвующих в процессе частиц квадраты 4-векторов q_a являются заданными квадратами масс частиц ($q_a^2 = m_a^2$). В зависимости от значений, пробегаемых временными компонентами q_a^0, и от значений зарядов мы получим три разные реакции. Запишем эти три процесса так:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I)} && 1 + 2 \to 3 + 4, \\ &\mathrm{II)} && 1 + \bar{3} \to \bar{2} + 4, \qquad (66,2) \\ &\mathrm{III)} && 1 + \bar{4} \to \bar{2} + 3. \end{aligned}$$

Здесь цифра означает номер частицы, а черта над цифрой отличает античастицу от частицы. Переходу от одной из реакций к другой, т. е. перенесению частицы из одной стороны формулы в другую, отвечает изменение знака соответствующей временной компоненты q_a^0, а также знака заряда, т. е. замена частицы античастицей. (Наряду с процессами (66,2) возможны, конечно, и обратные реакции.)

О трех процессах (66,2) говорят как о трех *перекрестных* (или *кросс-*) *каналах* одной (обобщенной) реакции.

Приведем несколько примеров. Если частицы 1 и 3 — электроны, а 2 и 4 — фотоны, то канал I представляет собой рассеяние фотона электроном; ввиду истинной нейтральности фотона канал III — то же, что I. Канал же II есть превращение электрон-позитронной пары в два фотона. Если все четыре частицы — электроны, то канал I — рассеяние электрона на электроне, а каналы II и III — рассеяние позитрона на электроне. Если частицы 1 и 3 — электроны, а 2 и 4 — мюоны, то канал I — рассеяние e на μ, канал III — рассеяние e на $\bar{\mu}$, канал II — превращение пары $e\bar{e}$ в пару $\mu\bar{\mu}$.

При рассмотрении процессов рассеяния особую роль играют инвариантные величины, которые можно составить из 4-импульсов. Их функцией являются инвариантные амплитуды рассеяния (см. § 70).

Из четырех 4-импульсов можно составить две независимые инвариантные величины. Действительно, в силу (66,1) всего три 4-вектора q_a независимы; пусть это будут q_1, q_2, q_3. Из них можно составить шесть инвариантов: три квадрата q_1^2, q_2^2, q_3^2 и три произведения q_1q_2, q_1q_3, q_2q_3. Но первые три есть заданные квадраты масс, а вторые три связаны одним соотношением, следующим из равенства [1])

$$(q_1+q_2+q_3)^2=q_4^2=m_4^2.$$

Для достижения большей симметрии удобно, однако, рассматривать не два, а три инварианта, в качестве которых выберем следующие:

$$\begin{aligned} s&=(q_1+q_2)^2=(q_3+q_4)^2,\\ t&=(q_1+q_3)^2=(q_2+q_4)^2,\\ u&=(q_1+q_4)^2=(q_2+q_3)^2. \end{aligned} \tag{66,3}$$

Они связаны, как легко видеть, соотношением

$$s+t+u=h, \tag{66,4}$$

где

$$h=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2. \tag{66,5}$$

В основном (I) канале инвариант s имеет простой физический смысл. Это есть квадрат полной энергии сталкивающихся частиц (1 и 2) в системе их центра инерции (при $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=0$: $s=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2$). В канале II аналогичную роль играет инвариант t, а в канале III — инвариант u. В связи с этим каналы I, II, III часто называют s-, t- и u-каналами.

Не представляет труда выразить инварианты s, t, u через энергии и импульсы сталкивающихся частиц в каждом из каналов. Рассмотрим s-канал. В системе центра инерции частиц 1 и 2 временные и пространственные компоненты 4-векторов q_a задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} q_1&=p_1=(\varepsilon_1,\ \mathbf{p}_s), & q_2&=p_2=(\varepsilon_2,\ -\mathbf{p}_s),\\ q_3&=-p_3=(-\varepsilon_3,\ -\mathbf{p}'_s), & q_4&=-p_4=(-\varepsilon_4,\ \mathbf{p}'_s) \end{aligned} \tag{66,6}$$

[1]) В общем случае, когда в реакции участвуют $n\geqslant 4$ частиц, число функционально независимых инвариантных переменных равно $3n-10$. Действительно, имеется всего $4n$ величин — компонент n 4-импульсов q_a. Между ними имеется n функциональных связей $q_a^2=m_a^2$ и еще четыре, даваемых законом сохранения $\sum q_a=0$. Произвольные значения могут быть приданы шести величинам — по числу параметров, определяющих общее преобразование Лоренца (общий четырехмерный поворот). Поэтому число независимых инвариантных переменных: $4n-n-4-6=3n-10$.

(индекс s у $\mathbf{p}_s$, $\mathbf{p}'_s$ напоминает о том, что эти импульсы относятся к реакции в s-канале). Тогда

$$s = \varepsilon_s^2, \quad \varepsilon_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4; \tag{66,7}$$

$$\begin{aligned} 4s\mathbf{p}_s^2 &= \left[s - (m_1 + m_2)^2\right]\left[s - (m_1 - m_2)^2\right], \\ 4s\mathbf{p}_s'^2 &= \left[s - (m_3 + m_4)^2\right]\left[s - (m_3 - m_4)^2\right]; \end{aligned} \tag{66,8}$$

$$\begin{aligned} 2t &= h - s + 4\mathbf{p}_s\mathbf{p}'_s - \frac{1}{s}\left(m_1^2 - m_2^2\right)\left(m_3^2 - m_4^2\right), \\ 2u &= h - s - 4\mathbf{p}_s\mathbf{p}'_s + \frac{1}{s}\left(m_1^2 - m_2^2\right)\left(m_3^2 - m_4^2\right). \end{aligned} \tag{66,9}$$

В случае упругого рассеяния ($m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$) имеем $|\mathbf{p}_s| = |\mathbf{p}'_s|$, так что $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$. Вместо (66,9) при этом получаются более простые формулы

$$\begin{aligned} t &= -(\mathbf{p}_s - \mathbf{p}'_s)^2 = -2\mathbf{p}_s^2(1 - \cos\theta_s), \\ u &= -2\mathbf{p}_s^2(1 + \cos\theta_s) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2, \end{aligned} \tag{66,10}$$

где θ_s — угол между $\mathbf{p}_s$ и $\mathbf{p}'_s$. Отметим, что инвариант $-t$ представляет собой при этом квадрат переданного при столкновении (трехмерного) импульса.

Аналогичные формулы для других каналов получаются простым изменением обозначений. Для перехода к t-каналу надо произвести в (66,6—10) замену $s \leftrightarrow t$, $2 \leftrightarrow 3$; для перехода к u-каналу — замену $s \leftrightarrow u$, $2 \leftrightarrow 4$.

§ 67. Физические области

Рассматривая амплитуды рассеяния как функции независимых переменных s, t, u (связанных лишь соотношением $s + t + u = h$), мы сталкиваемся с необходимостью различать физически допустимые и недопустимые области их значений. Значения, которые могут отвечать физическому процессу рассеяния, должны удовлетворять определенным условиям, являющимся следствиями закона сохранения 4-импульса и того факта, что квадрат каждого из 4-векторов q_a есть заданная величина $q_a^2 = m_a^2$.

Произведение двух 4-импульсов

$$p_a p_b \geqslant m_a m_b. \tag{67,1}$$

Поэтому

$$(q_a + q_b)^2 = (p_a + p_b)^2 \geqslant (m_a + m_b)^2,$$

если $q_a = p_a$, $q_b = p_b$ (или $q_a = -p_a$, $q_b = -p_b$), или же

$$(q_a + q_b)^2 = (p_a - p_b)^2 \leqslant (m_a - m_b)^2,$$