

(индекс  $s$  у  $\mathbf{p}_s, \mathbf{p}'_s$  напоминает о том, что эти импульсы относятся к реакции в  $s$ -канале). Тогда

$$s = \varepsilon_s^2, \quad \varepsilon_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4; \quad (66,7)$$

$$4sp_s^2 = [s - (m_1 + m_2)^2] [s - (m_1 - m_2)^2], \quad (66,8)$$

$$4sp_s'^2 = [s - (m_3 + m_4)^2] [s - (m_3 - m_4)^2];$$

$$2t = h - s + 4\mathbf{p}_s\mathbf{p}'_s - \frac{1}{s} (m_1^2 - m_2^2) (m_3^2 - m_4^2), \quad (66,9)$$

$$2u = h - s - 4\mathbf{p}_s\mathbf{p}'_s + \frac{1}{s} (m_1^2 - m_2^2) (m_3^2 - m_4^2).$$

В случае упругого рассеяния ( $m_1 = m_3, m_2 = m_4$ ) имеем  $|\mathbf{p}_s| = |\mathbf{p}'_s|$ , так что  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3, \varepsilon_2 = \varepsilon_4$ . Вместо (66,9) при этом получают более простые формулы

$$\begin{aligned} t &= -(\mathbf{p}_s - \mathbf{p}'_s)^2 = -2p_s^2 (1 - \cos \theta_s), \\ u &= -2p_s^2 (1 + \cos \theta_s) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2, \end{aligned} \quad (66,10)$$

где  $\theta_s$  — угол между  $\mathbf{p}_s$  и  $\mathbf{p}'_s$ . Отметим, что инвариант  $-t$  представляет собой при этом квадрат переданного при столкновении (трехмерного) импульса.

Аналогичные формулы для других каналов получаются простым изменением обозначений. Для перехода к  $t$ -каналу надо произвести в (66,6—10) замену  $s \leftrightarrow t, 2 \leftrightarrow 3$ ; для перехода к  $u$ -каналу — замену  $s \leftrightarrow u, 2 \leftrightarrow 4$ .

## § 67. Физические области

Рассматривая амплитуды рассеяния как функции независимых переменных  $s, t, u$  (связанных лишь соотношением  $s + t + u = h$ ), мы сталкиваемся с необходимостью различать физически допустимые и недопустимые области их значений. Значения, которые могут отвечать физическому процессу рассеяния, должны удовлетворять определенным условиям, являющимся следствиями закона сохранения 4-импульса и того факта, что квадрат каждого из 4-векторов  $q_a$  есть заданная величина  $q_a^2 = m_a^2$ .

Произведение двух 4-импульсов

$$p_a p_b \geq m_a m_b. \quad (67,1)$$

Поэтому

$$(q_a + q_b)^2 = (p_a + p_b)^2 \geq (m_a + m_b)^2,$$

если  $q_a = p_a, q_b = p_b$  (или  $q_a = -p_a, q_b = -p_b$ ), или же

$$(q_a + q_b)^2 = (p_a - p_b)^2 \leq (m_a - m_b)^2,$$

если  $q_a = p_a$ ,  $q_b = -p_b$ . Отсюда следует, что для реакции в  $s$ -канале:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)^2 &\leq s \leq (m_3 + m_4)^2, \\ (m_1 - m_3)^2 &\geq t \leq (m_2 - m_4)^2, \\ (m_1 - m_4)^2 &\geq u \leq (m_2 - m_3)^2 \end{aligned} \quad (67,2)$$

(аналогичные неравенства — в  $t$ - и  $u$ -каналах).

Для нахождения остальных условий составим 4-вектор  $L$ , дуальный произведению каких-либо трех из 4-векторов  $q_a$ , скажем

$$L_\lambda = e_{\lambda\mu\nu\rho} q_1^\mu q_2^\nu q_3^\rho. \quad (67,3)$$

В системе покоя одной из частиц (например, частицы 1)  $q_1 = (q_1^0, 0)$ . При этом  $L$  имеет лишь пространственные компоненты:  $L_i = e_{i0k1} q_1^0 q_2^k q_3^1$ . Другими словами,  $L$  — пространственноподобный вектор, и во всякой системе отсчета  $L^2 \leq 0$ . Раскрыв квадрат  $L^2$ , получим условие

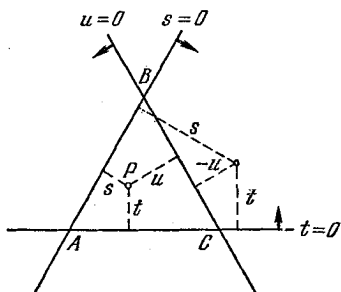


Рис. 5

$$\begin{vmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_2 q_1 & q_2^2 & q_2 q_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3^2 \end{vmatrix} \geq 0. \quad (67,4)$$

Оно может быть выражено через инварианты  $s$ ,  $t$ ,  $u$  в едином для всех каналов виде

$$stu \geq as + bt + cu, \quad (67,5)$$

где

$$\begin{aligned} ah &= (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2) (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2), \\ bh &= (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2) (m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2), \\ ch &= (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2) (m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2) \end{aligned} \quad (67,6)$$

(T. W. B. Kibble, 1960).

Для графического изображения областей изменения переменных  $s$ ,  $t$ ,  $u$  удобно пользоваться так называемыми треугольными координатами на плоскости (плоскость Мандельштама; S. Mandelstam, 1958). Координатными осями в ней являются три прямые, образующие в пересечении равносторонний треугольник. Координаты  $s$ ,  $t$ ,  $u$  отсчитываются по направлениям, перпендикулярным этим трем прямым. (Считаем положительными направлениями внутрь треугольника, как указано на рис. 5 стрелками.) Другими словами, каждой точке плоскости отвечают зна-

чения  $s$ ,  $t$ ,  $u$ , изображающиеся (с соответствующими знаками) длинами перпендикуляров, опущенных на три оси. Выполнение условия  $s + t + u = h$  обеспечивается при этом известной геометрической теоремой (если высота равностороннего треугольника равна  $h$ )<sup>1)</sup>.

Рассмотрим важный случай, когда основному ( $s$ ) каналу отвечает упругое рассеяние; при этом массы частиц попарно одинаковы:

$$m_1 = m_3 \equiv m, \quad m_2 = m_4 \equiv \mu. \quad (67,7)$$

Пусть  $m > \mu$ . В условии (67,5) имеем

$$h = 2(m^2 + \mu^2), \quad a = c = 0, \quad b = (m^2 - \mu^2)^2,$$

так что

$$sut \geq (m^2 - \mu^2)^2 t. \quad (67,8)$$

Граница области, определяемой этим неравенством, состоит из прямой  $t = 0$  и гиперболы

$$su = (m^2 - \mu^2)^2, \quad (67,9)$$

две ветви которой лежат в секторах  $u < 0$ ,  $s < 0$  и  $s > 0$ ,  $u > 0$ ; оси  $s = 0$  и  $u = 0$  являются асимптотами гиперболы. Вместо (67,8) можно написать

$$\begin{aligned} & t > 0, \quad su > (m^2 - \mu^2)^2 \\ \text{или} \quad & t < 0, \quad su < (m^2 - \mu^2)^2. \end{aligned}$$

Кроме того, из условий (67,2) надо дополнительно учесть неравенство  $s > (m + \mu)^2$  в  $s$ -канале; и  $u > (m + \mu)^2$  в  $u$ -канале; остальные неравенства удовлетворяются после этого автоматически. В результате найдем, что каналам I, II, III ( $s$ ,  $t$ ,  $u$ ) отвечают, как говорят, *физические области*, изображенные на рис. 6 штриховкой.

Если  $\mu = 0$  (частицы 2, 4 — фотоны), то нижняя ветвь гиперболы касается оси  $t = 0$  и физические области выглядят, как показано на рис. 7.

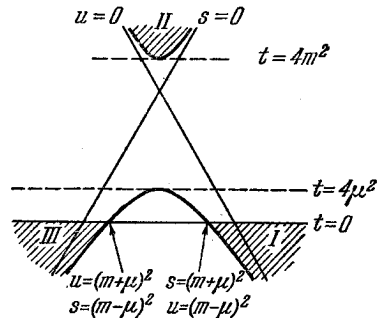


Рис. 6

<sup>1)</sup> Соединив, например, точку  $P$  (рис. 5) с тремя вершинами треугольника  $ABC$ , мы разобьем его на три треугольника с высотами  $s$ ,  $t$ ,  $u$ ; приравняв сумму их площадей площади треугольника  $ABC$ , найдем требуемое равенство. Аналогичным образом оно доказывается и в случае, когда точка  $P$  лежит вне треугольника  $ABC$ .

Если же  $m = \mu$ , то границы области (67,8) вырождаются в координатные оси и физическими областями являются показанные на рис. 8 три сектора.

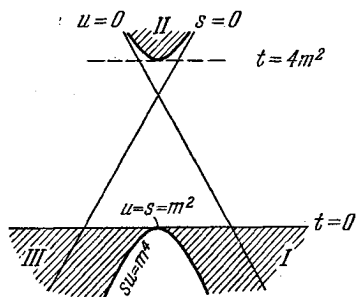


Рис. 7

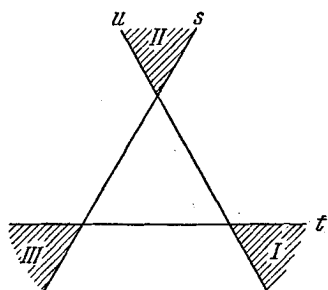


Рис. 8

В общем случае четырех различных масс уравнение

$$stu = as + bt + cu \quad (67,10)$$

определяет кривую третьего порядка, ветви которой ограничи-

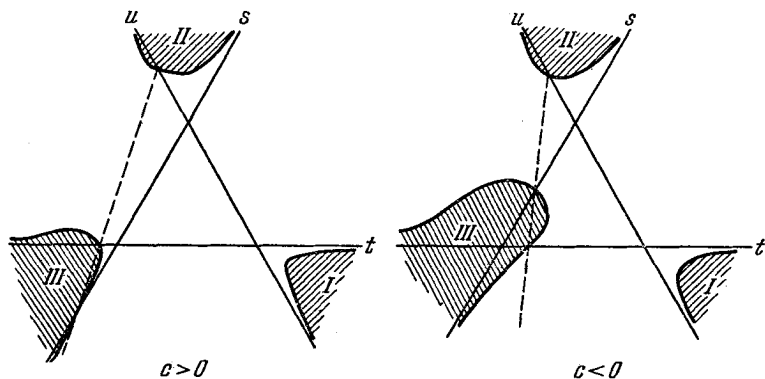


Рис. 9

вают физические области трех каналов, как показано на рис. 9. Пусть

$$m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq m_4.$$

Тогда

$$a \geq b \geq c, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Кривая (67,10) пересекает координатные оси в точках, лежащих на прямой

$$as + bt + cu = 0$$

(см. пунктирные линии на рис. 9). В зависимости от знака  $c$  она проходит, как показано на рис. 9. При  $c < 0$  физическая

область  $u$ -канала захватывает часть площади координатного треугольника; другими словами, в этом случае величины  $s$ ,  $t$ ,  $u$  могут быть одновременно положительными. Все три ветви граничной кривой имеют в качестве асимптот соответствующие координатные оси (в этом легко убедиться, исключив из уравнения (67,10) одну из переменных с помощью соотношения  $s + t + u = h$  и устремив затем одну из оставшихся переменных к бесконечности). Условия (67,2) не вносят в общем случае ничего нового по сравнению с границами, устанавливаемыми уравнением (67,10). Прямые линии, соответствующие знакам равенства в (67,2), не пересекают заштрихованных на рис. 9 физических областей; некоторые из них касаются границ этих областей, отвечая экстремальным значениям переменных  $s$ ,  $t$  или  $u$  в соответствующем канале.

В случае, когда масса одной из частиц больше суммы масс трех остальных ( $m_1 > m_2 + m_3 + m_4$ ), наряду с каналами I, II, III возможен еще четвертый канал реакции, отвечающий распаду:

$$\text{IV) } 1 \rightarrow \bar{2} + 3 + 4. \quad (67,11)$$

Для этого канала в системе покоя распадающейся частицы

$$q_1 = (m_1, 0), \quad q_2 = (-\varepsilon_2, -\mathbf{p}_2), \quad q_3 = (-\varepsilon_3, -\mathbf{p}_3), \quad q_4 = (-\varepsilon_4, -\mathbf{p}_4), \\ \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = m_1, \quad \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = 0.$$

Инварианты:

$$s = m_1^2 + m_2^2 - 2m_1\varepsilon_2, \\ t = m_1^2 + m_3^2 - 2m_1\varepsilon_3, \\ u = m_1^2 + m_4^2 - 2m_1\varepsilon_4. \quad (67,12)$$

Из (67,1) получим теперь:

$$(m_3 + m_4)^2 \leq s \leq (m_1 - m_2)^2, \\ (m_2 + m_4)^2 \leq t \leq (m_1 - m_3)^2, \\ (m_2 + m_3)^2 \leq u \leq (m_1 - m_4)^2. \quad (67,13)$$

Таким образом, все три инварианта положительны, т. е. физическая область канала распада находится внутри координатного треугольника.

### Задачи

1. Найти физические области в случае трех одинаковых масс:  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \mu$  (например, реакция  $K + \pi \rightarrow \pi + \pi$ ).

Решение. Уравнение (67,10) принимает вид

$$stu = \mu^2 (m^2 - \mu^2)^2, \quad (1)$$

причем

$$s + t + u = 3\mu^2 + m^2.$$

Области I, II, III ограничены одинаковыми по форме кривыми (для I:  $s > 0, t < 0, u < 0$ , и аналогично для II и III). Если  $m > 3\mu$ , то (1) имеет также ветвь (замкнутую кривую) с  $s > 0, t > 0, u > 0$  — границу области канала IV (рис. 10).

2. То же в случае  $m_1 \equiv m, m_2 \equiv \mu, m_3 = m_4 = 0, m > \mu$  (например, реакция  $\mu + \nu \rightarrow e + \nu$ ).

Решение. Условие (67,5) принимает вид

$$stu \geq m^2 \mu^2 s,$$

причем  $s + t + u = m^2 + \mu^2$ . Физические области ограничены осью  $s = 0$  и двумя ветвями гиперболы  $tu = m^2 \mu^2$  (рис. 11).

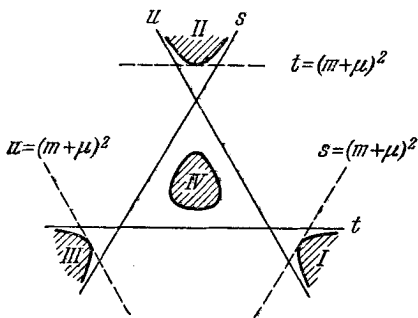


Рис. 10

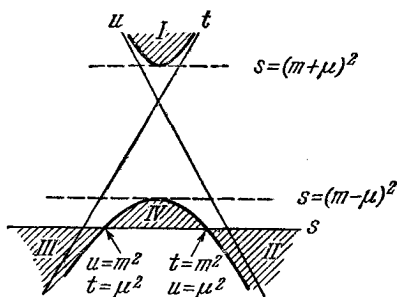


Рис. 11

3. То же в случае  $m_1 = m_3 \equiv m, m_2 = 0, m_4 \equiv \mu$ , причем  $m > 2\mu$  (например, реакция  $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$ ).

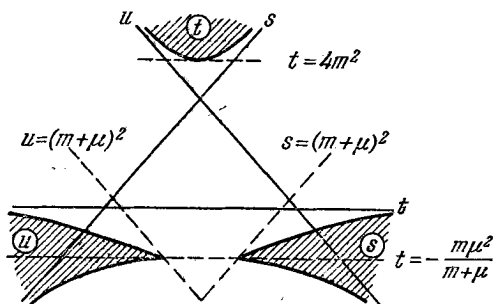


Рис. 12

Решение. Уравнение границ (67,10) принимает вид

$$stu = a(s + u) + bt, \\ ah = m^2 \mu^4, \quad bh = m^4(2m^2 - \mu^2), \quad h = 2m^2 + \mu^2.$$

Исключив  $u$ , получим

$$t^2 + \left( \frac{b-a}{s} + s - h \right) t + \frac{ah}{s} = 0.$$

При заданном  $s$  это — квадратное уравнение для  $t$ . При  $s > (m + \mu)^2$  (область  $s$ -канала) каждому  $s$  отвечают два отрицательных значения  $t$ . При  $s = (m + \mu)^2$  эти два корня квадратного уравнения сливаются в один:

$t = -m\mu^2/(m + \mu)$ . Граница области  $s$ -канала имеет вид, показанный на рис. 12. Нижняя ветвь граничной кривой асимптотически приближается к оси  $u = 0$ , а верхняя пересекает эту ось в точке  $t = \mu^4/(\mu^2 - m^2)$ .

Область  $u$ -канала симметрична по отношению к области  $s$ -канала, а область  $t$ -канала расположена, как показано на рисунке.

### § 68. Разложение по парциальным амплитудам

Существенным этапом в анализе реакции вида

$$a + b \rightarrow c + d \quad (68,1)$$

является разложение амплитуды рассеяния по парциальным амплитудам, каждая из которых отвечает (при заданной полной энергии  $\epsilon$ ) определенному значению полного момента частиц  $J$  в системе их центра инерции<sup>1)</sup>.

Эти парциальные амплитуды представляют собой, другими словами, элементы  $S$ -матрицы в моментном представлении:

$$\langle \epsilon J' M' | S | \epsilon J M \rangle.$$

Поскольку момент  $J$  и его проекция  $M$  на заданную ось  $z$  сохраняются,  $S$ -матрица диагональна по этим числам (как и по энергии  $\epsilon$ ). При этом в силу изотропии пространства диагональные элементы не зависят от значения  $M$ . При заданных  $J$ ,  $M$ ,  $\epsilon$  матрица рассеяния остается еще матрицей по отношению к спиновым квантовым числам; элементы этой матрицы мы будем записывать более коротко в виде

$$\langle \epsilon J M \lambda' | S | \epsilon J M \lambda \rangle \equiv \langle \lambda' | S^J(\epsilon) | \lambda \rangle, \quad (68,2)$$

где  $\lambda$  и  $\lambda'$  — совокупности спиновых квантовых чисел. В качестве последних наиболее естественно воспользоваться здесь спиральностями частиц. Напомним, что спиральность (в отличие от проекции спина на произвольную ось в пространстве) сохраняется для свободной частицы, а также что она коммутирует как с импульсом, так и с моментом частицы (§ 16). Поэтому спиральностями можно пользоваться как в импульсном, так и в моментном представлении матрицы рассеяния.

Элементы  $S$ -матрицы по индексам спиральностей мы будем называть *спиральными амплитудами* рассеяния и, таким образом, будем подразумевать под  $\lambda$  и  $\lambda'$  совокупности спиральностей начальных и конечных частиц:  $\lambda = (\lambda_a, \lambda_b)$ ,  $\lambda' = (\lambda_c, \lambda_d)$ .

В импульсном представлении элементы матрицы рассеяния определяются по отношению к состояниям  $|\epsilon \mathbf{n} \lambda\rangle$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  — направление импульса относительного движения в системе центра инерции), а в моментном — по отношению к состояниям

<sup>1)</sup> Большая часть результатов, излагаемых в § 68, 69, принадлежит *Жакобу и Виду* (M. Jacob, G. C. Wick, 1959).