$t = -m\mu^2/(m+\mu)$. Граница области s-канала имеет вид, показанный на рис. 12. Нижняя ветвь граничной кривой асимптотически приближается к оси $u=0$, а верхняя пересекает эту ось в точке $t = \mu^4/(\mu^2 - m^2)$.

Область u-канала симметрична по отношению к области s-канала, а область t-канала расположена, как показано на рисунке.

§ 68. Разложение по парциальным амплитудам

Существенным этапом в анализе реакции вида

$$a + b \rightarrow c + d \tag{68,1}$$

является разложение амплитуды рассеяния по парциальным амплитудам, каждая из которых отвечает (при заданной полной энергии ε) определенному значению полного момента частиц J в системе их центра инерции [1]).

Эти парциальные амплитуды представляют собой, другими словами, элементы S-матрицы в моментном представлении:

$$\langle \varepsilon J'M' | S | \varepsilon JM \rangle.$$

Поскольку момент J и его проекция M на заданную ось z сохраняются, S-матрица диагональна по этим числам (как и по энергии ε). При этом в силу изотропии пространства диагональные элементы не зависят от значения M. При заданных J, M, ε матрица рассеяния остается еще матрицей по отношению к спиновым квантовым числам; элементы этой матрицы мы будем записывать более коротко в виде

$$\langle \varepsilon JM\lambda' | S | \varepsilon JM\lambda \rangle \equiv \langle \lambda' | S^J(\varepsilon) | \lambda \rangle, \tag{68,2}$$

где λ и λ' — совокупности спиновых квантовых чисел. В качестве последних наиболее естественно воспользоваться здесь спиральностями частиц. Напомним, что спиральность (в отличие от проекции спина на произвольную ось в пространстве) сохраняется для свободной частицы, а также что она коммутирует как с импульсом, так и с моментом частицы (§ 16). Поэтому спиральностями можно пользоваться как в импульсном, так и в моментном представлениях матрицы рассеяния.

Элементы S-матрицы по индексам спиральностей мы будем называть *спиральными амплитудами* рассеяния и, таким образом, будем подразумевать под λ и λ' совокупности спиральностей начальных и конечных частиц: $\lambda = (\lambda_a, \lambda_b)$, $\lambda' = (\lambda_c, \lambda_d)$.

В импульсном представлении элементы матрицы рассеяния определяются по отношению к состояниям $|\varepsilon \mathbf{n}\lambda\rangle$ ($\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ — направление импульса относительного движения в системе центра инерции), а в моментном — по отношению к состояниям

---

[1]) Бо́льшая часть результатов, излагаемых в § 68, 69, принадлежит *Жакобу* и *Вику* (*M. Jacob, G. C. Wick*, 1959).

$|\varepsilon JM\lambda\rangle$. Они выражаются друг через друга в виде разложений

$$|JM\lambda\rangle = \int |\mathbf{n}\lambda\rangle\langle\mathbf{n}\lambda|JM\lambda\rangle\, do_{\mathbf{n}}, \tag{68,3}$$

где интегрирование производится по направлениям $\mathbf{n}$ (энергию ε в символах состояний будем для краткости опускать). В силу унитарности этого преобразования (см. III, § 12) коэффициенты обратного преобразования

$$\langle JM\lambda|\mathbf{n}\lambda\rangle = \langle\mathbf{n}\lambda|JM\lambda\rangle^*. \tag{68,4}$$

По общему правилу преобразования матриц эти же коэффициенты определят связь между элементами S-матриц в обоих представлениях:

$$\langle\mathbf{n}'\lambda'|S|\mathbf{n}\lambda\rangle = \sum_{JM}\langle\mathbf{n}'\lambda'|JM\lambda'\rangle\langle JM\lambda'|S|JM\lambda\rangle\langle JM\lambda|\mathbf{n}\lambda\rangle. \tag{68,5}$$

Коэффициенты разложения (68,3) легко найти с помощью результатов § 16.

Пусть волновые функции всех состояний выражены в импульсном представлении, т. е. как функции направления импульса (при заданной энергии); это направление как независимую переменную обозначим $\boldsymbol{\nu}$ в отличие от направления $\mathbf{n}$ как квантового числа состояния. В этом представлении волновая функция имеет вид (16,2)

$$\psi_{\mathbf{n}\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = u^{(\lambda)}\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\mathbf{n}). \tag{68,6}$$

При подстановке (68,6) в разложение (68,3) последнее сводится к одному члену:

$$\psi_{JM\lambda} = \langle\boldsymbol{\nu}\lambda|JM\lambda\rangle u^{(\lambda)}. \tag{68,7}$$

Спиральность λ_a и λ_b каждой из двух частиц определяется как проекция ее спина на направление ее же импульса. Если импульсы частиц $\mathbf{p}_a \equiv \mathbf{p}$, $\mathbf{p}_b = -\mathbf{p}$, то для первой частицы это — направление $\mathbf{n}$, а для второй — направление $-\mathbf{n}$. Если рассматривать теперь систему как одну частицу со спиральностью Λ в направлении $\mathbf{n}$, то $\Lambda = \lambda_a - \lambda_b$. Ее волновая функция (в импульсном представлении) может быть представлена согласно (16,4) в виде

$$\psi_{JM\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = u^{(\lambda)}D^{(J)}_{\Lambda M}(\boldsymbol{\nu})\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}. \tag{68,8}$$

Сравнив выражения (68,7—8) (и изменив обозначение переменной $\boldsymbol{\nu}$ на $\mathbf{n}$), получим для искомых коэффициентов

$$\langle\mathbf{n}\lambda|JM\lambda\rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\,D^{(J)}_{\Lambda M}(\mathbf{n}). \tag{68,9}$$

Подстановка этих коэффициентов в (68,5) дает

$$\langle \mathbf{n}'\lambda' | S | \mathbf{n}\lambda \rangle = \sum_{JM} \frac{2J+1}{4\pi} D^{(J)}_{\Lambda' M}(\mathbf{n}') D^{(J)*}_{\Lambda M}(\mathbf{n}) \langle \lambda' | S^J | \lambda \rangle, \tag{68,10}$$

$$\Lambda = \lambda_a - \lambda_b, \quad \Lambda' = \lambda_c - \lambda_d,$$

где использовано сокращенное обозначение (68,2). Выберем направление $\mathbf{n}$ в качестве оси z; тогда

$$D^{(J)}_{\Lambda M}(\mathbf{n}) = \delta_{\Lambda M}$$

и (68,10) принимает вид

$$\langle \mathbf{n}'\lambda' | S | \mathbf{n}\lambda \rangle = \sum_{J} \frac{2J+1}{4\pi} D^{(J)}_{\Lambda' \Lambda}(\mathbf{n}') \langle \lambda' | S^J | \lambda \rangle. \tag{68,11}$$

Мы видим, что разложение по парциальным амплитудам осуществляется с функциями $D^{(J)}_{\Lambda'\Lambda}$ в качестве коэффициентов. Для реакции вида (68,1) удобно определить амплитуду рассеяния f таким образом, чтобы сечение (в системе центра инерции) было

$$d\sigma = |\langle \mathbf{n}'\lambda' | f | \mathbf{n}\lambda \rangle|^2 do' \tag{68,12}$$

(сравнением с (64,19) можно связать эту амплитуду с матричным элементом M_{fi}). Ее разложение по парциальным амплитудам напишем в виде

$$\langle \mathbf{n}'\lambda' | f | \mathbf{n}\lambda \rangle = \sum_{JM} (2J+1) D^{(J)}_{\Lambda' M}(\mathbf{n}') D^{(J)*}_{\Lambda M}(\mathbf{n}) \langle \lambda' | f^J | \lambda \rangle, \tag{68,13}$$

или, выбирая ось z вдоль направления $\mathbf{n}$:

$$\langle \mathbf{n}'\lambda' | f | \mathbf{n}\lambda \rangle = \sum_{J} (2J+1) D^{(J)}_{\Lambda' \Lambda}(\mathbf{n}') \langle \lambda' | f^J | \lambda \rangle. \tag{68,14}$$

Эта формула представляет собой обобщение обычного разложения по парциальным амплитудам для рассеяния бесспиновых частиц (см. III (123,14)). Поскольку $D^{(L)}_{00} = P_L(\cos\theta)$, при равных нулю спинах (68,14) сводится к разложению по полиномам Лежандра

$$f(\theta) = \sum_{L} (2L+1) f_L P_L(\cos\theta).$$

Сечение (68,12) относится к случаю, когда все частицы имеют определенные спиральности. Если же частицы находятся в смешанных поляризационных состояниях, то сечение получается путем усреднения произведения

$$\langle \lambda_c\lambda_d | f | \lambda_a\lambda_b \rangle \langle \lambda'_c\lambda'_d | f | \lambda'_a\lambda'_b \rangle^*$$

по поляризационным матрицам плотности частиц

$$\langle\lambda_a|\rho^{(a)}|\lambda'_a\rangle\langle\lambda_b|\rho^{(b)}|\lambda'_b\rangle\langle\lambda'_c|\rho^{(c)}|\lambda_c\rangle\langle\lambda'_d|\rho^{(d)}|\lambda_d\rangle$$

(см. примеч. на с. 205). Так, для реакции между неполяризованными частицами a, b с образованием неполяризованных же частиц c, d получим

$$d\sigma=\frac{do}{(2s_a+1)(2s_b+1)}\sum_{(\lambda)}\sum_{JJ'}(2J+1)(2J'+1)\langle\lambda_c\lambda_d|f^J|\lambda_a\lambda_b\rangle\times$$
$$\times\langle\lambda_e\lambda_d|f^{J'}|\lambda_a\lambda_b\rangle^* D^{(J)}_{\lambda'\Lambda}(\mathbf{n}')D^{(J')*}_{\lambda'\Lambda}(\mathbf{n}') \qquad (68,15)$$

(ось z направлена по $\mathbf{n}$, знак $\sum_{(\lambda)}$ означает суммирование по $\lambda_a\lambda_b\lambda_c\lambda_d$). Заменив функцию $D^{(J')*}_{\lambda'\Lambda}$ согласно III (58,19) и затем воспользовавшись разложением III (110,2), получим окончательно

$$d\sigma=\frac{do}{(2s_a+1)(2s_b+1)}\sum_{(\lambda)JJ'}(-1)^{\Lambda-\Lambda'}(2J+1)(2J'+1)\times$$
$$\times\langle\lambda_c\lambda_d|f^J|\lambda_a\lambda_b\rangle\langle\lambda_c\lambda_d|f^{J'}|\lambda_a\lambda_b\rangle^*\sum_L(2L+1)\times$$
$$\times\begin{pmatrix}J & J' & L\\ \Lambda & -\Lambda & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J & J' & L\\ \Lambda' & -\Lambda' & 0\end{pmatrix}P_L(\cos\theta) \qquad (68,16)$$

(θ — угол между $\mathbf{n}'$ и осью z); суммирование по L производится по всем целым значениям, возникающим при векторном сложении $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}'$.

Разложение амплитуды рассеяния по парциальным амплитудам полностью учитывает все свойства углового распределения рассеяния, связанные с симметрией по отношению к пространственным вращениям. Оно, однако, не учитывает в явном виде свойства, связанные с симметрией по отношению к пространственной инверсии. P-инвариантность (если взаимодействие обладает ею) приводит к определенным связям между различными спиральными амплитудами (см. ниже, § 69).

§ 69. Симметрия спиральных амплитуд рассеяния

Требования, налагаемые симметрией по отношению к преобразованиям P, C, T (если, конечно, данный процесс взаимодействия частиц действительно обладает этой симметрией), приводят к появлению определенных связей между различными спиральными амплитудами рассеяния и тем самым уменьшают число независимых амплитуд[1]).

[1]) Само число независимых амплитуд не зависит, конечно, от конкретного представления матрицы S^J и остается одинаковым при любом выборе спиновых переменных.