а коэффициенты

$$\langle JM\lambda_1\lambda_2 \,|\, JLSM\rangle =$$
$$= (-i)^L (-1)^{s_1-s_2+S} \sqrt{(2L+1)(2S+1)} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & S \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & S & J \\ 0 & \Lambda & -\Lambda \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В силу унитарности преобразования (2)

$$\langle JLSM \,|\, JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \langle JM\lambda_1\lambda_2 \,|\, JLSM\rangle^*.$$

§ 70. Инвариантные амплитуды

В спиральных амплитудах используется определенная система отсчета — система центра инерции. Между тем при вычислении амплитуд рассеяния с помощью инвариантной теории возмущений (а также для исследования их общих аналитических свойств) удобно записывать амплитуды в явно инвариантной форме.

Если частицы, участвующие в реакции, не имеют спина, то амплитуда рассеяния зависит только от инвариантных произведений 4-импульсов частиц. Для реакции вида

$$a + b \to c + d \quad (70,1)$$

в качестве этих инвариантов можно выбрать какие-либо две из определенных в § 66 величин s, t, u. Тогда амплитуда рассеяния сводится к одной функции $M_{fi} = f(s, t)$.

Если же частицы обладают спинами, то, помимо кинематических инвариантов s, t, u, существуют также инварианты, которые можно составить из волновых амплитуд частиц (биспиноров, 4-тензоров и т. п.). Амплитуды рассеяния должны тогда иметь вид

$$M_{fi} = \sum_n f_n(s, t) F_n, \quad (70,2)$$

где F_n — инварианты, линейно зависящие от волновых амплитуд всех участвующих частиц (а также от их 4-импульсов). Коэффициенты $f_n(s, t)$ называют *инвариантными амплитудами*.

Выбрав волновые амплитуды так, чтобы они отвечали частицам с определенными спиральностями, мы получим определенные значения инвариантов $F_n = F_n(\lambda_i\ \lambda_f)$. Тогда спиральные амплитуды рассеяния представятся в виде линейных однородных комбинаций инвариантных амплитуд f_n. Отсюда видно, что число независимых функций $f_n(s, t)$ совпадает с числом независимых спиральных амплитуд. Поскольку число последних определяется легко (как было объяснено в § 69), тем самым облегчается задача построения инвариантов F_n, — мы заранее знаем, сколько их должно быть.

Рассмотрим некоторые примеры. Во всех примерах будем считать, что взаимодействие T- и P-инвариантно; последнее свойство означает, что инварианты F_n должны быть истинными (а не псевдо) скалярами.

Рассеяние частицы со спином 0 на частице со спином $^1/_2$

Для подсчета числа инвариантов — или, что то же, числа независимых спиральных амплитуд — замечаем, что полное число элементов матрицы S^J (т. е. число различных наборов чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2'$) в данном случае равно 4 $(\lambda_1 = \lambda_1' = 0,\ \lambda_2,\ \lambda_2' = \pm{}^1/_2)$ С учетом P-инвариантности число независимых элементов сводится к двум, после чего учет T-инвариантности уже не меняет этого числа.

В качестве двух независимых инвариантов можно выбрать

$$F_1 = \bar{u}'u, \quad F_2 = \bar{u}'(\gamma K)\, u. \tag{70,3}$$

Здесь $u = u(p)$, $u' = u(p')$ — биспинорные амплитуды начального и конечного фермионов; $K = k + k'$, где k и k' — 4-импульсы начального и конечного бозонов [1]).

T-инвариантность величин (70,3) станет очевидной, если заметить, что произведения $\bar{u}'u$ и $\bar{u}'\gamma^\mu u$ преобразуются при обращении времени по тому же закону (28,6), что и операторы $\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}$ и $\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\hat{\psi}$, матричными элементами которых они являются: произведение $\bar{u}'u$ инвариантно само по себе, а 4-вектор $\bar{u}'\gamma u$ преобразуется по закону

$$\bar{u}'\gamma^0 u \to \bar{u}'\gamma^0 u, \quad \bar{u}'\boldsymbol{\gamma} u \to -\bar{u}'\boldsymbol{\gamma} u.$$

Таким же образом преобразуются 4-импульсы $(K^0, \mathbf{K}) \to (K^0, -\mathbf{K})$, и скалярное произведение $F_2 = K_\mu(\bar{u}'\gamma^\mu u)$, следовательно, инвариантно.

Упругое рассеяние двух тождественных частиц со спином $^1/_2$

Для подсчета числа независимых спиральных амплитуд удобно исходить из линейных комбинаций спиральных состояний:

$$\psi_{1g} = \psi_{++} + \psi_{--}, \quad \psi_{2g} = \psi_{++} - \psi_{--}, \quad \psi_{3g} = \psi_{+-} + \psi_{-+},$$
$$\psi_u = \psi_{+-} - \psi_{-+},$$

[1]) На первый взгляд можно было бы составить еще инвариант вида $\bar{u}'\sigma_{\mu\nu}k^\mu k'^\nu u$ (матрицы $\sigma_{\mu\nu}$ определены в (28,2)). Легко, однако, убедиться в его сводимости к инвариантам (70,3), если учесть закон сохранения $k' = p + k - p'$ и уравнения

$$(\gamma p)\, u = mu, \quad \bar{u}'(\gamma p') = m\bar{u}',$$

которым удовлетворяют биспинорные амплитуды.

где индексы «+», «—» указывают значения спиральностей ($\pm 1/2$) двух частиц. Состояния $1g$, $2g$, $3g$ четны, а состояние u нечетно по отношению к перестановке частиц. Поэтому переходы $g \leftrightarrow u$ запрещены, так что с учетом перестановочной симметрии остается $16-6=10$ матричных элементов. По отношению к инверсии P функции ψ_{1g}, ψ_{3g} и ψ_{2g} имеют противоположные четности; запрещение переходов между ними уменьшает число независимых амплитуд до шести. Наконец, T-инвариантность приводит к совпадению амплитуд переходов $1g \to 3g$ и $3g \to 1g$, так что остается всего пять независимых амплитуд. В качестве пяти независимых инвариантов можно выбрать

$$\begin{gathered} F_1 = (\bar{u}_1' u_1)(\bar{u}_2' u_2), \qquad F_2 = (\bar{u}_1' \gamma^5 u_1)(\bar{u}_2' \gamma^5 u_2), \\ F_3 = (\bar{u}_1' \gamma^\mu u_1)(\bar{u}_2' \gamma_\mu u_2), \qquad F_4 = (\bar{u}_1' \gamma^\mu \gamma^5 u_1)(\bar{u}_2' \gamma_\mu \gamma^5 u_2), \\ F_5 = (\bar{u}_1' \sigma^{\mu\nu} u_1)(\bar{u}_2' \sigma_{\mu\nu} u_2), \end{gathered} \tag{70,4}$$

где u_1, u_2 — биспинорные амплитуды начальных, а u_1', u_2' — конечных частиц. Перестановка начальных (или конечных) частиц не приводит к новым инвариантам: новые инварианты выражаются через старые (см. задачу к § 28). Но выражение (70,2) с F_n из (70,4) не учитывает в явном виде требования, согласно которому перестановка двух тождественных фермионов должна менять знак амплитуды рассеяния. Удовлетворяющее этому требованию выражение можно записать в виде

$$M_{fi} = \left[(\bar{u}_1' u_1)(\bar{u}_2' u_2) f_1(t, u) - (\bar{u}_2' u_1)(\bar{u}_1' u_2) f_1(u, t)\right] + \ldots \tag{70,5}$$

При перестановке p_1' и p_2' (или p_1 и p_2) кинематические инварианты: $s \to s$, $t \to u$, $u \to t$, так что указанное требование выполняется автоматически.

Упругое рассеяние фотона на частицах со спином 0 и 1/2

Амплитуду этих процессов целесообразно выразить с помощью единичных пространственноподобных 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} e^{(1)2} = e^{(2)2} = -1, \qquad e^{(1)} e^{(2)} = 0, \\ e^{(1)} k = e^{(2)} k = 0, \qquad e^{(1)} k' = e^{(2)} k' = 0 \end{gathered} \tag{70,6}$$

(для каждого из двух фотонов эти 4-векторы могут служить теми 4-ортами, с помощью которых осуществляется инвариантное описание их поляризационных свойств — см. § 8).

Пусть k и k' — начальный и конечный 4-импульсы фотона, а p и p' — то же для рассеивающей частицы. Рассмотрим

4-векторы

$$P^\lambda = p^\lambda + p'^\lambda - K^\lambda \frac{pK + p'K}{K^2}, \quad N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu q_\nu K_\rho, \tag{70,7}$$

где

$$K = k + k', \quad q = p - p' = k' - k.$$

Они очевидным образом взаимно ортогональны. Они ортогональны также 4-векторам K, q, а следовательно, и k, k'. Будучи ортогональны времениподобному 4-вектору $K(K^2 = 2kk' > 0)$, они сами пространственноподобны (действительно, в системе отсчета, в которой $\mathbf{K} = 0$, из $KP = 0$ следует, что $P_0 = 0$, а потому $P^2 < 0$). Пронормировав P и N, т. е. образовав

$$e^{(1)\lambda} = \frac{N^\lambda}{\sqrt{-N^2}}, \quad e^{(2)\lambda} = \frac{P^\lambda}{\sqrt{-P^2}}, \tag{70,8}$$

мы получим пару 4-векторов, обладающих всеми требуемыми свойствами. Отметим, что $e^{(2)}$ — истинный, а $e^{(1)}$ — псевдовектор.

Представим амплитуду рассеяния фотона в виде

$$M_{fi} = F^{\lambda\mu} e'^*_\lambda e_\mu, \tag{70,9}$$

выделив в ней 4-векторы поляризации e и e' начального и конечного фотонов.

Спиральность фотона пробегает всего два значения (± 1). Поэтому для рассеяния фотона на частице со спином 0 число независимых спиральных амплитуд такое же, как для взаимного рассеяния частиц со спином 0 и $^1/_2$, т. е. равно 2. Тензор $F^{\lambda\mu}$ в (70,9) должен быть построен только из 4-импульсов частиц. Его можно представить в виде

$$F^{\lambda\mu} = f_1 e^{(1)\lambda} e^{(1)\mu} + f_2 e^{(2)\lambda} e^{(2)\mu}, \tag{70,10}$$

где f_1, f_2 — инвариантные амплитуды. Обратим внимание на то, что в $F^{\lambda\mu}$ не может быть члена с произведением $e^{(1)\lambda} e^{(2)\mu}$, так как это произведение — псевдотензор и при подстановке в (70,9) дало бы псевдоскаляр.

Наконец, рассмотрим рассеяние фотона на частице со спином $^1/_2$. Для подсчета числа независимых спиральных амплитуд замечаем, что полное число элементов матрицы S^J в этом случае есть 16 (спиральность каждой из двух начальных и двух конечных частиц пробегает по два значения). Требование P-инвариантности уменьшает это число до 8; после чего требование T-инвариантности доводит его до 6.

Представим тензор $F_{\lambda\mu}$ в этом случае в виде

$$F_{\lambda\mu} = G_0 (e^{(1)}_\lambda e^{(1)}_\mu + e^{(2)}_\lambda e^{(2)}_\mu) + G_1 (e^{(1)}_\lambda e^{(2)}_\mu + e^{(2)}_\lambda e^{(1)}_\mu) + \\ + G_2 (e^{(1)}_\lambda e^{(2)}_\mu - e^{(2)}_\lambda e^{(1)}_\mu) + G_3 (e^{(1)}_\lambda e^{(1)}_\mu - e^{(2)}_\lambda e^{(2)}_\mu), \tag{70,11}$$

где G_0, G_3 — истинные, а G_1, G_2 — псевдоскаляры. Те и другие билинейны относительно биспинорных амплитуд фермионов $\bar{u}(p')$ и $u(p)$, т. е. имеют вид

$$G_n = \bar{u}(p') Q_n u(p). \qquad (70,12)$$

Общий вид матриц (по биспинорным индексам) Q_n:

$$\begin{aligned} Q_0 &= f_1 + f_2(\gamma K), & Q_1 &= \gamma^5 [f_3 + f_4(\gamma K)], \\ Q_2 &= \gamma^5 [f_5 + f_6(\gamma K)], & Q_3 &= f_7 + f_8(\gamma K), \end{aligned} \qquad (70,13)$$

где $K = k + k'$. Коэффициенты $f_1, \ldots, f_8$ — инвариантные амплитуды, число которых получилось здесь равным 8 (вместо нужного 6) ввиду того, что еще не учтено требование T-инвариантности.

Обращение времени переставляет начальные и конечные 4-импульсы частиц, меняя также знаки их пространственных компонент:

$$(k_0, \mathbf{k}) \leftrightarrow (k_0', -\mathbf{k}'), \quad (p_0, \mathbf{p}) \leftrightarrow (p_0', -\mathbf{p}'); \qquad (70,14)$$

4-векторы поляризации фотонов преобразуются согласно

$$(e_0, \mathbf{e}) \leftrightarrow (e_0'^*, -\mathbf{e}'^*) \qquad (70,15)$$

(ср. (8,11а)), так что

$$(e_0'^* e_0,\ e_i'^* e_0,\ e_i'^* e_k) \to (e_0'^* e_0,\ -e_0'^* e_i,\ e_k'^* e_i).$$

В силу последнего преобразования условие инвариантности амплитуды рассеяния (70,9) эквивалентно требованию

$$(F_{00}, F_{i0}, F_{ik}) \to (F_{00}, -F_{0i}, F_{ki}).$$

С другой стороны, как следствие замен (70,14) имеем

$$\begin{aligned} (K_0, \mathbf{K}) &\to (K_0, -\mathbf{K}), & (q_0, \mathbf{q}) &\to (-q_0, \mathbf{q}), \\ (P_0, \mathbf{P}) &\to (P_0, -\mathbf{P}), & (N_0, \mathbf{N}) &\to (N_0, -\mathbf{N}), \end{aligned}$$

так что

$$(e_0^{(1,2)}, \mathbf{e}^{(1,2)}) \to (e_0^{(1,2)}, -\mathbf{e}^{(1,2)}). \qquad (70,16)$$

Из выражения (70,11) следует поэтому, что должно быть

$$G_{0,1,3} \to G_{0,1,3}, \quad G_2 \to -G_2.$$

Но при обращении времени

$$\bar{u}'\gamma^5 u \to -\bar{u}'\gamma^5 u, \quad \bar{u}'\gamma^5(\gamma K) u \to \bar{u}'\gamma^5(\gamma K) u,$$

как это ясно из законов преобразования псевдоскалярных и псевдовекторных билинейных форм в (28,6). Поэтому из выражений (70,12—13) видно, что в силу T-инвариантности амплитуды рассеяния должно быть

$$f_3 = f_6 = 0. \qquad (70,17)$$