§ 71. Условие унитарности

Матрица рассеяния должна быть унитарной: $\hat{S}\hat{S}^{+} = 1$, или в матричных элементах:

$$(SS^{+})_{fi} = \sum_{n} S_{fn} S_{in}^{*} = \delta_{fi}, \tag{71,1}$$

где индекс n нумерует все возможные промежуточные состояния[1]. Это — наиболее общее свойство S-матрицы, которым обеспечивается сохранение нормировки и ортогональности состояний при реакции (ср. III, § 125, 144). В частности, диагональные элементы равенства (71,1) выражают просто тот факт, что сумма вероятностей перехода из данного начального в любое конечное состояние равна единице:

$$\sum_{n} |S_{ni}|^2 = 1.$$

Подставив в (71,1) матричные элементы в виде (64,2), получим

$$T_{fi} - T_{if}^{*} = i(2\pi)^4 \sum_{n} \delta^{(4)}(P_f - P_n) T_{fn} T_{in}^{*} =$$
$$= i(2\pi)^4 \sum_{n} \delta^{(4)}(P_f - P_n) T_{nf}^{*} T_{ni}. \tag{71,2}$$

Написанные здесь две эквивалентные формы правой стороны равенства получаются при записи условия унитарности соответственно в виде $\hat{S}\hat{S}^{+} = 1$ или $\hat{S}^{+}\hat{S} = 1$, с разными порядками расположения множителей $\hat{S}$ и $\hat{S}^{+}$.

Обратим внимание на то, что левая сторона этого равенства линейна, а правая квадратична по матричным элементам T. Поэтому если взаимодействие (как, например, электромагнитное) содержит малый параметр, то левая сторона будет первого, а правая — второго порядка малости. В первом приближении последней можно, следовательно, пренебречь, и тогда

$$T_{fi} = T_{if}^{*}, \tag{71,3}$$

т. е. матрица T эрмитова.

Для придания условию унитарности (71,2) более конкретного вида надо уточнить, что́ именно подразумевается под суммированием по n. Сделаем это для столкновения двух частиц, причем будем считать, что законы сохранения допускают только

[1]) Смысл символа δ_{fi} в (71,1) зависит, конечно, от конкретного выбора квантовых чисел и от нормировки волновых функций системы. Он должен быть определен так, чтобы было $\sum_{f} \delta_{if} = 1$.

упругое рассеяние; тогда и все промежуточные состояния в (71,2) — такие же «двухчастичные». Суммирование по ним означает интегрирование по промежуточным импульсам $\mathbf{p}_1''$, $\mathbf{p}_2''$ и суммирование по спиновым квантовым числам (например, спиральностям) обеих частиц, которые обозначим λ'':

$$\sum_n \to \int \frac{V^2 d^3p_1'' d^3p_2''}{(2\pi)^6} \sum_{\lambda''}.$$

Исключив δ-функции тем же способом, как это делалось в § 64, получим «двухчастичное» условие унитарности в виде

$$T_{fi} - T_{if}^* = \frac{iV^2}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda''} \frac{|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \int T_{fn} T_{in}^* \varepsilon_1'' \varepsilon_2'' \, do'',$$

где $\mathbf{p}$ — импульс, ε — полная энергия в системе центра инерции. Нормировочный объем исчезает из этого соотношения после перехода от амплитуд T_{fi} к амплитудам M_{fi} согласно (64,10):

$$M_{fi} - M_{if}^* = \frac{i}{(4\pi)^2} \sum_{\lambda''} \frac{|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \int M_{fn} M_{in}^* \, do''. \tag{71,4}$$

Определим амплитуду упругого рассеяния так, чтобы было

$$d\sigma = |\langle \mathbf{n}'\lambda' | f | \mathbf{n}\lambda \rangle|^2 \, do' \tag{71,5}$$

($\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ — направления начального и конечного импульсов; λ, λ' — начальные и конечные спиновые квантовые числа). Сравнение с (64,19) показывает, что

$$\langle \mathbf{n}'\lambda' | f | \mathbf{n}\lambda \rangle = \frac{1}{8\pi\varepsilon} M_{fi}, \tag{71,6}$$

и условие унитарности (71,4) принимает вид

$$\langle \mathbf{n}'\lambda' | f | \mathbf{n}\lambda \rangle - \langle \mathbf{n}\lambda | f | \mathbf{n}'\lambda' \rangle^* = \\ = \frac{i|\mathbf{p}|}{2\pi} \sum_{\lambda''} \int \langle \mathbf{n}'\lambda' | f | \mathbf{n}''\lambda'' \rangle \langle \mathbf{n}\lambda | f | \mathbf{n}''\lambda'' \rangle^* \, do'', \tag{71,7}$$

обобщающий известную формулу нерелятивистской теории III (125,8).

Амплитудой упругого рассеяния на нулевой угол называют диагональный матричный элемент T_{ii}, в котором конечное состояние частиц совпадает с начальным[1]). Для этой амплитуды

[1]) Подчеркнем, что речь идет именно об элементах матрицы T, а не S, т. е. диагональный элемент берется после исключения из S единичной матрицы.

условие унитарности (71,2) принимает вид

$$2\,\mathrm{Im}\,T_{ii}=(2\pi)^4\sum_n|T_{in}|^2\delta^{(4)}(P_i-P_n). \qquad (71,8)$$

Правая сторона этого равенства лишь множителем отличается от полного сечения всех возможных процессов рассеяния из данного начального состояния i; обозначим это сечение посредством σ_t. Действительно, суммируя вероятность (64,5) по состояниям f и деля на плотность потока j, находим

$$\sigma_t=\frac{(2\pi)^4 V}{j}\sum_n|T_{in}|^2\delta^{(4)}(P_i-P_n),$$

так что

$$\frac{2V}{j}\,\mathrm{Im}\,T_{ii}=\sigma_t.$$

Нормировочный объем исчезает отсюда после замены $T_{ii}=M_{ii}/(2\varepsilon_1 V\cdot 2\varepsilon_2 V)$ (ε_1, ε_2 — энергии частиц в системе центра инерции) и подстановки j из (64,17):

$$\mathrm{Im}\,M_{ii}=2|\mathbf{p}|\varepsilon\sigma_t. \qquad (71,9)$$

Эта формула составляет содержание так называемой *оптической теоремы*. Если ввести амплитуду упругого рассеяния (71,6), она примет свой обычный вид

$$\mathrm{Im}\langle\mathbf{n}\lambda|f|\mathbf{n}\lambda\rangle=\frac{|\mathbf{p}|}{4\pi}\sigma_t \qquad (71,10)$$

(ср. III (142,10)).

Если S-матрица дана в моментном представлении (парциальные амплитуды), то ввиду ее диагональности по J условие унитарности пишется для каждого значения J в отдельности.

Так, если возможно лишь упругое рассеяние, условие унитарности имеет вид

$$\sum_{\lambda''}\langle\lambda'|S^J|\lambda''\rangle\langle\lambda|S^J|\lambda''\rangle^*=\delta_{\lambda\lambda'}. \qquad (71,11)$$

В силу T-инвариантности матрица упругого рассеяния симметрична (ср. (69,10)) и поэтому может быть приведена к диагональному виду. После этого условие унитарности требует равенства диагональных элементов по модулю единице; их принято в таком случае записывать в виде

$$S_n^J=\exp(2i\delta_{Jn}), \qquad (71,12)$$

где δ_{Jn} — вещественные постоянные — функции энергии (индекс n нумерует при заданном J диагональные элементы). В общем случае, когда число N независимых амплитуд превышает ранг (квадратной) матрицы S^J, коэффициенты преобразования, осуществляющего диагонализацию S^J, зависят от J и E (в этих коэффициентах, наряду с главными значениями матрицы, заключены также независимые величины, эквивалентные исходным N величинам). Но если число N совпадает с рангом матрицы S^J (и тем самым с числом ее главных значений), то коэффициенты диагонализации универсальны. При этом диагонализирующие состояния — это состояния с определенными четностями (но, конечно, уже без определенных спиральностей).

Условие (71,11), выраженное с помощью парциальных амплитуд $\langle\lambda'|f^J|\lambda\rangle$, имеет вид

$$\langle\lambda'|f^J|\lambda\rangle - \langle\lambda|f^J|\lambda'\rangle^* = 2i|\mathbf{p}|\sum_{\lambda''}\langle\lambda'|f^J|\lambda''\rangle\langle\lambda|f^J|\lambda''\rangle^*, \qquad (71,13)$$

в чем легко убедиться, подставив в (71,7) разложение (68,13) и учтя ортонормированность D-функций. При T-инвариантности матрица $\langle\lambda'|f^J|\lambda\rangle$ симметрична, и (71,13) принимает вид

$$\operatorname{Im}\langle\lambda'|f^J|\lambda\rangle = |\mathbf{p}|\langle\lambda'|f^J f^{J+}|\lambda\rangle. \qquad (71,14)$$

Если матрица диагонализована, то ее диагональные элементы

$$f_n^J = \frac{1}{2i|\mathbf{p}|}\left(\exp\left(2i\delta_{Jn}\right) - 1\right) = \frac{1}{|\mathbf{p}|}\exp\left(i\delta_{Jn}\right)\sin\delta_{Jn}. \qquad (71,15)$$

Наконец, укажем некоторые следствия, возникающие из условия унитарности вместе с требованием CPT-инвариантности. В силу последней

$$T_{fi} = T_{\bar{i}\bar{f}}, \qquad (71,16)$$

где $\bar{i}$ и $\bar{f}$ — состояния, отличающиеся от i и f заменой всех частиц античастицами (а также изменением знака векторов момента при неизменных импульсах). В частности, для диагональных элементов

$$T_{ii} = T_{\bar{i}\bar{i}}.$$

Из (71,8) или (71,9) следует поэтому, что полное сечение всех возможных процессов (с заданным начальным состоянием) одинаково для реакций между частицами и античастицами.

В частности, одинаковы полные вероятности распада (т. е. времена жизни) частицы и античастицы. Эти результаты (наряду с равенством масс частицы и античастицы — § 11) — важнейшие следствия CPT-инвариантности взаимодействий. Напомним (см. конец § 69), что такое же утверждение для каждого из возможных каналов распада в отдельности требует также соблюдения CP-инвариантности.

Задача

Исходя из условия унитарности, найти связь между фазами парциальных амплитуд фоторождения пионов на нуклонах ($\gamma + N \to \pi + N$) и упругого рассеяния пионов на нуклонах ($\pi + N \to \pi + N$); при этом учитывается, что πN-рассеяние связано с сильными взаимодействиями, а фоторождение и γN-рассеяние — с электромагнитным взаимодействием.

Решение. Обозначим парциальные амплитуды:

$$\langle \pi N \mid S \mid \gamma N \rangle = S_{\pi\gamma}, \quad \langle \gamma N \mid S \mid \gamma N \rangle = S_{\gamma\gamma}, \quad \langle \pi N \mid S \mid \pi N \rangle = S_{\pi\pi}$$

(опущены индексы J и спиральностей). Фоторождение — процесс первого, а γN-рассеяние — второго порядка по заряду e; поэтому $S_{\pi\gamma} \sim e$, $S_{\gamma\gamma} - 1 \sim e^2$. Амплитуда же $S_{\pi\pi}$ малости не содержит. С точностью до членов $\sim e$ условия (71,1) дают

$$S_{\pi\gamma} S^*_{\gamma\gamma} + S_{\pi\pi} S^*_{\gamma\pi} \approx S_{\pi\gamma} + S_{\pi\pi} S^*_{\gamma\pi} = 0, \tag{1}$$

$$S_{\pi\gamma} S^*_{\pi\gamma} + S_{\pi\pi} S^*_{\pi\pi} \approx S_{\pi\pi} S^*_{\pi\pi} = 1 \tag{2}$$

(в правой стороне равенства (2) надо понимать 1 как единичную матрицу по спиновым переменным). В силу T-инвариантности матрица $S_{\pi\pi}$ симметрична, а $S_{\gamma\pi} = S_{\pi\gamma}$. Выберем матрицу $S_{\pi\pi}$ в диагональной форме, т. е. по отношению к состояниям пиона с определенными четностями; тогда из (2) следует, что диагональные элементы имеют вид $e^{2i\delta_\pi}$ с различными постоянными δ_π. После этого находим из (1) для каждого из элементов матрицы $S_{\pi\gamma}$:

$$S_{\pi\gamma}/S^*_{\pi\gamma} = -e^{2i\delta_\pi},$$

откуда

$$S_{\pi\gamma} = \pm \mid S_{\pi\gamma} \mid i e^{i\delta_\pi}.$$

Таким образом, фаза парциальной амплитуды фоторождения (в состояние с определенной четностью) определяется фазой упругого πN-рассеяния.