ГЛАВА VIII

ИНВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 72. Хронологическое произведение

Вероятности различных процессов при столкновениях частиц, взаимодействие между которыми можно считать малым, вычисляются с помощью теории возмущений. В своей обычной (для нерелятивистской квантовой механики) форме аппарат этой теории обладает, однако, тем недостатком, что в нем не выявляются явным образом требования релятивистской инвариантности. Хотя при применении такого аппарата к релятивистским задачам окончательный результат и будет удовлетворять этим требованиям, но неинвариантная форма промежуточных формул существенно усложняет вычисления. Настоящая глава посвящена развитию свободной от этого недостатка последовательной релятивистской теории возмущений; она была построена *Фейнманом* (*R. P. Feynman*, 1948—1949).

Имея в виду вторично квантованное описание системы, обозначим Φ ее волновую функцию в представлении чисел заполнения различных состояний свободных частиц. Гамильтониан системы $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, где $\hat{V}$ — оператор взаимодействия. Пусть Φ_n — собственные функции невозмущенного гамильтониана; каждая из них отвечает некоторым определенным значениям всех чисел заполнения. Произвольная функция Φ представляется в виде разложения $\Phi = \sum C_n \Phi_n$. Тогда точное волновое уравнение

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{V}) \Phi \tag{72,1}$$

представится в виде системы уравнений для коэффициентов C_n:

$$i\dot{C}_n = \sum_m V_{nm} \exp[i(E_n - E_m)t] C_m, \tag{72,2}$$

где V_{nm} — не зависящие от времени матричные элементы оператора $\hat{V}$, а E_n — уровни энергии невозмущенной системы (ср. III, § 40).

По определению оператор $\hat{V}$ не зависит явно от времени. Величины же

$$V_{nm}(t) = V_{nm} \exp[i(E_n - E_m)t] \tag{72,3}$$

можно рассматривать как матричные элементы зависящего от времени оператора

$$\hat{V}(t) = \exp(i\hat{H}_0 t)\,\hat{V}\exp(-i\hat{H}_0 t). \tag{72,4}$$

О нем говорят как об операторе в *представлении взаимодействия* (в отличие от исходного не зависящего от времени шредингеровского оператора $\hat{V}$ [1])). Обозначив теперь прежней буквой Φ волновую функцию в этом новом представлении, запишем уравнения (72,2) в символическом виде

$$i\dot{\Phi} = \hat{V}(t)\,\Phi. \tag{72,5}$$

Изменение волновой функции в этом представлении связано лишь с действием возмущения, т. е. отвечает процессам, происходящим благодаря взаимодействию частиц.

Если $\Phi(t)$ и $\Phi(t+\delta t)$ — значения Φ в два бесконечно близких момента времени, то в силу (72,5) они связаны друг с другом посредством

$$\Phi(t+\delta t) = [1 - i\,\delta t\cdot\hat{V}(t)]\,\Phi(t) = \exp[-i\,\delta t\cdot\hat{V}(t)]\,\Phi(t).$$

Соответственно значение Φ в произвольный момент t_f может быть выражено через значение в некоторый начальный момент t_i $(t_f > t_i)$ как

$$\Phi(t_f) = \left\{\prod_i^f \exp[-i\,\delta t_\alpha\cdot\hat{V}(t_\alpha)]\right\}\Phi(t_i), \tag{72,6}$$

где знак П означает предел произведения по всем бесконечно малым интервалам δt_α между t_i и t_f. Если бы $V(t)$ было обычной функцией, то этот предел сводился бы просто к

$$\exp\left\{-i\int_{t_i}^{t_f} V(t)\,dt\right\}.$$

Но такое сведение основано на коммутативности множителей (взятых в различные моменты времени), подразумевающейся при переходе от произведения в (72,6) к суммированию в экспоненте. Для оператора $\hat{V}(t)$ такой коммутативности нет, и сведение к обычному интегралу невозможно.

[1]) Подчеркнем, что в определении (72,4) фигурирует невозмущенный гамильтониан $\hat{H}_0$. Этим оно отличается от *гейзенберговского представления* операторов, в котором

$$\hat{V}^H(t) = \exp(i\hat{H}t)\,\hat{V}\exp(-i\hat{H}t)$$

(см. III, § 13 и ниже, § 102).

Напишем (72,6) в символическом виде

$$\Phi(t_f) = \mathrm{T}\exp\left\{-i\int\limits_{t_i}^{t_f}\hat{V}(t)\,dt\right\}\Phi(t_i), \tag{72,7}$$

где Т — символ *хронологизации*, означающий определенную («хронологическую») последовательность моментов времени в последовательных множителях произведения (72,6). В частности, положив $t_i \to -\infty$, $t_f \to +\infty$, получим

$$\Phi(+\infty) = \hat{S}\Phi(-\infty), \tag{72,8}$$

где

$$\hat{S} = \mathrm{T}\exp\left\{-i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{V}(t)\,dt\right\}. \tag{72,9}$$

Смысл записи (72,7—9) формально точного решения волнового уравнения состоит в том, что такая запись позволяет легко написать ряд, представляющий собой разложение по степеням возмущения:

$$\hat{S} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt_2\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt_k\cdot\mathrm{T}\{\hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2)\ldots\hat{V}(t_k)\}. \tag{72,10}$$

Здесь в каждом члене k-я степень интеграла написана в виде k-кратного интеграла, а символ Т означает, что в каждой области значений переменных $t_1, t_2, \ldots, t_k$ надо располагать соответствующие операторы в хронологическом порядке справа налево в порядке возрастающих значений t [1]).

Из определения (72,8) ясно, что если до столкновения система была в состоянии Φ_i (некоторая совокупность свободных частиц), то амплитуда вероятности ее перехода в состояние Φ_f (другая совокупность свободных частиц) есть матричный элемент S_{fi}. Другими словами, эти элементы и составляют S-матрицу.

Оператор электромагнитного взаимодействия был написан уже в § 43:

$$\hat{V} = e\int(\hat{j}\hat{A})\,d^3x. \tag{72,11}$$

Подставив его в (72,9), получим

$$\hat{S} = \mathrm{T}\exp\left\{-ie\int(\hat{j}\hat{A})\,d^4x\right\}. \tag{72,12}$$

---

[1]) Вывод правил релятивистской теории возмущений с помощью разложения (72,10) принадлежит *Дайсону* (*F. Dayson*, 1949).

Существенно, что оператор (72,12) релятивистски инвариантен. Это видно из скалярности подынтегрального выражения, инвариантного характера интегрирования по d^4x и инвариантного характера операции хронологизации. Последнее обстоятельство требует, однако, разъяснения.

Как известно, последовательность двух моментов времени t_1 и t_2 (знак разности $t_2 - t_1$) не зависит от выбора системы отсчета, если эти моменты относятся к мировым точкам x_1 и x_2, разделенным времениподобным интервалом: $(x_2 - x_1)^2 > 0$. В таком случае инвариантность хронологизации автоматична. Если же $(x_2 - x_1)^2 < 0$ (пространственноподобный интервал), то в разных системах отсчета может быть как $t_2 > t_1$, так и $t_2 < t_1$ [1]). Но такие две точки отвечают событиям, между которыми не может существовать причинной связи. Очевидно поэтому, что не могут быть некоммутативными операторы двух физических величин, относящихся к таким точкам: некоммутативность операторов физически означает совместную неизмеримость данных величин, что предполагает наличие физической связи между обоими измерениями. Следовательно, хронологичность произведения останется инвариантной и в этом случае: хотя преобразование Лоренца может нарушить последовательность моментов времени, но ввиду коммутативности множителей их можно переставить обратно в хронологический порядок [2]).

Легко видеть, что данное в этом параграфе определение S-матрицы автоматически удовлетворяет условию унитарности. Представив $\hat{S}$ в виде хронологического произведения, фигурирующего в (72,6), и учитывая эрмитовость $\hat{V}$, найдем, что $\hat{S}^+$ выражается произведением таких же множителей $\exp(i\,\delta t_a \times \times \hat{V}(t_a))$ (с обратным знаком в показателе) в хронологически

---

[1]) Вместо времениподобных и пространственноподобных интервалов часто говорят для краткости об областях соответственно внутри и вне светового конуса: все точки x, отделенные от точки x' интервалом с $(x - x')^2 > 0$, находятся внутри двуполостного конуса с вершиной в точке x', а точки, отделенные интервалом с $(x - x')^2 < 0$, — вне этого конуса.

[2]) В применении к произведению $\hat{V}(t_1)\,\hat{V}(t_2)\,\ldots$ это утверждение надо уточнить во избежание недоразумений. Поскольку сам оператор $\hat{V}$ не обладает калибровочной инвариантностью (он меняется вместе с $\hat{A}$), множители $\hat{V}(t_1)$, $\hat{V}(t_2)$, ..., коммутативные при одной калибровке потенциала, могут оказаться некоммутативными при другой калибровке. Сделанные выше утверждения надо поэтому сформулировать как возможность такого выбора калибровки потенциала, при котором $\hat{V}(t_1)$ и $\hat{V}(t_2)$ вне светового конуса будут коммутативны. Эта оговорка, очевидно, никак не сказывается на инвариантности S-матрицы: амплитуды рассеяния как реальные физические величины вообще не могут зависеть от калибровки потенциала (формально эта независимость следует из отмеченной в § 43 калибровочной инвариантности интеграла действия).

обратном порядке. Поэтому при перемножении $\hat{S}$ и $\hat{S}^+$ все множители попарно сокращаются.

Обратим внимание на то, что унитарность оператора $\hat{S}$ обеспечивается в данном случае эрмитовостью гамильтониана. Но требование унитарности имеет в действительности более общий характер, чем предпосылки, лежащие в основе излагаемой теории. Оно должно было бы выполняться и при квантовомеханическом описании, не использующем понятий о гамильтониане и волновых функциях.

§ 73. Диаграммы Фейнмана для рассеяния электронов

Покажем на конкретных примерах, каким образом осуществляется вычисление элементов матрицы рассеяния. Эти примеры облегчат дальнейшую формулировку общих правил инвариантной теории возмущений.

Оператор тока $\hat{j}$ содержит произведение двух электронных ψ-операторов. Поэтому в первом порядке теории возмущений могли бы возникнуть процессы, в которых участвуют всего (в начальном и конечном состояниях) три частицы — два электрона (оператор $\hat{j}$) и один фотон (оператор $\hat{A}$). Легко, однако, видеть, что такие процессы между свободными частицами невозможны — они запрещены законом сохранения энергии и импульса. Если p_1 и p_2 — 4-импульсы электронов, а k — фотона, то сохранение 4-импульса изображалось бы равенством $k = p_2 - p_1$ или $k = p_2 + p_1$. Но такие равенства невозможны, так как для фотона $k^2 = 0$, а квадрат $(p_2 \pm p_1)^2$ заведомо отличен от нуля. Действительно, вычисляя значение инварианта $(p_2 \pm p_1)^2$ в системе покоя одного из электронов, получаем

$$(p_2 \pm p_1)^2 = 2(m^2 \pm p_1 p_2) = 2(m^2 \pm \varepsilon_1\varepsilon_2 \mp \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) = 2m(m \pm \varepsilon_2).$$

Поскольку $\varepsilon_2 > m$, то

$$(p_2 + p_1)^2 > 0, \quad (p_2 - p_1)^2 < 0. \tag{73,1}$$

Таким образом, первые неисчезающие (недиагональные) элементы S-матрицы могут появиться лишь во втором порядке теории возмущений. Все относящиеся сюда процессы содержатся в операторе второго порядка, получающемся при разложении выражения (72,12):

$$\hat{S}^{(2)} = -\frac{e^2}{2!}\iint d^4x d^4x' \cdot \mathrm{T}\left(\hat{j}^\mu(x)\hat{A}_\mu(x)\hat{j}^\nu(x')\hat{A}_\nu(x')\right).$$

Поскольку электронные и фотонные операторы коммутативны друг с другом, фигурирующее здесь T-произведение можно