

обратном порядке. Поэтому при перемножении \hat{S} и \hat{S}^+ все множители попарно сокращаются.

Обратим внимание на то, что унитарность оператора \hat{S} обеспечивается в данном случае эрмитовостью гамильтониана. Но требование унитарности имеет в действительности более общий характер, чем предпосылки, лежащие в основе излагаемой теории. Оно должно было бы выполняться и при квантовомеханическом описании, не использующем понятий о гамильтониане и волновых функциях.

§ 73. Диаграммы Фейнмана для рассеяния электронов

Покажем на конкретных примерах, каким образом осуществляется вычисление элементов матрицы рассеяния. Эти примеры облегчат дальнейшую формулировку общих правил инвариантной теории возмущений.

Оператор тока \hat{j} содержит произведение двух электронных ψ -операторов. Поэтому в первом порядке теории возмущений могли бы возникнуть процессы, в которых участвуют всего (в начальном и конечном состояниях) три частицы — два электрона (оператор \hat{j}) и один фотон (оператор \hat{A}). Легко, однако, видеть, что такие процессы между свободными частицами невозможны — они запрещены законом сохранения энергии и импульса. Если p_1 и p_2 — 4-импульсы электронов, а k — фотона, то сохранение 4-импульса изображалось бы равенством $k = p_2 - p_1$ или $k = p_2 + p_1$. Но такие равенства невозможны, так как для фотона $k^2 = 0$, а квадрат $(p_2 \pm p_1)^2$ заведомо отличен от нуля. Действительно, вычисляя значение инварианта $(p_2 \pm p_1)^2$ в системе покоя одного из электронов, получаем

$$(p_2 \pm p_1)^2 = 2(m^2 \pm p_1 p_2) = 2(m^2 \pm \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mp \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) = 2m(m \pm \varepsilon_2).$$

Поскольку $\varepsilon_2 > m$, то

$$(p_2 + p_1)^2 > 0, \quad (p_2 - p_1)^2 < 0. \quad (73,1)$$

Таким образом, первые неисчезающие (недиагональные) элементы S -матрицы могут появиться лишь во втором порядке теории возмущений. Все относящиеся сюда процессы содержатся в операторе второго порядка, получающемся при разложении выражения (72,12):

$$\hat{S}^{(2)} = -\frac{e^2}{2i} \iint d^4x d^4x' \cdot T(\hat{j}^\mu(x) \hat{A}_\mu(x) \hat{j}^\nu(x') \hat{A}_\nu(x')).$$

Поскольку электронные и фотонные операторы коммутативны друг с другом, фигурирующее здесь T -произведение можно

разбить на два T -произведения:

$$\widehat{S}^{(2)} = -\frac{e^2}{2I} \iint d^4x d^4x' \cdot T(\widehat{j}^\mu(x) \widehat{j}^\nu(x')) T(\widehat{A}_\mu(x) \widehat{A}_\nu(x')). \quad (73,2)$$

В качестве первого примера рассмотрим упругое рассеяние двух электронов: в начальном состоянии имеем два электрона с 4-импульсами p_1 и p_2 , а в конечном — два электрона с другими 4-импульсами p_3 и p_4 . Подразумевается также, что все электроны находятся в определенных спиновых состояниях; индексы спиновых переменных для краткости везде опускаем.

Поскольку в обоих состояниях фотоны вообще отсутствуют, нужный нам матричный элемент T -произведения фотонных операторов есть диагональный элемент $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$, где символ $|0\rangle$ обозначает состояние фотонного вакуума. Это среднее по вакууму значение T -произведения представляет собой определенную (для каждой пары индексов $\mu\nu$) функцию координат двух точек x и x' . При этом в силу однородности 4-пространства координаты могут входить лишь в виде разности $x - x'$. Тензор

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle \quad (73,3)$$

называют *фотонной функцией распространения* (или *фотонным пропагатором*). Явное выражение для нее будет получено в § 76.

Для T -произведения электронных операторов нам надо вычислить матричный элемент

$$\langle 34 | T j^\mu(x) j^\nu(x') | 12 \rangle, \quad (73,4)$$

где символы $|12\rangle$, $|34\rangle$ обозначают состояния с парами электронов с соответствующими импульсами. Этот элемент тоже может быть представлен в виде среднего по вакууму с помощью очевидного равенства

$$\langle 2 | F | 1 \rangle = \langle 0 | a_2 F a_1^+ | 0 \rangle,$$

где \widehat{F} — произвольный оператор, а \widehat{a}_1^+ и \widehat{a}_2 — операторы соответственно рождения первого и уничтожения второго электрона. Поэтому вместо (73,4) можно вычислять величину

$$\langle 0 | a_3 a_1 T(j^\mu(x) j^\nu(x')) a_2^+ a_1^+ | 0 \rangle \quad (73,5)$$

(индексы 1, 2, ... для краткости заменяют p_1, p_2, \dots).

Каждый из двух операторов тока есть произведение $\widehat{j} = \widehat{\psi} \gamma \widehat{\psi}$, а каждый из ψ -операторов представляется суммой

$$\widehat{\psi} = \sum_p (\widehat{a}_p \psi_p + \widehat{b}_p^+ \psi_{-p}), \quad \widehat{\bar{\psi}} = \sum_p (\widehat{a}_p^+ \bar{\psi}_p + \widehat{b}_p \bar{\psi}_{-p}) \quad (73,6)$$

(вторые члены содержат позитронные операторы, которые в данном случае «не работают»). Поэтому произведение $\widehat{j}^\mu(x) \widehat{j}^\nu(x')$

представляется в виде суммы членов, каждый из которых содержит произведение двух операторов \hat{a}_p и двух \hat{a}_p^+ . Эти операторы должны обеспечить уничтожение электронов 1, 2 и рождение электронов 3, 4. Другими словами, это должны быть операторы $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3^+, \hat{a}_4^+$, которые, как говорят, *свертываются* с «внешними» операторами $\hat{a}_1^+, \hat{a}_2^+, \hat{a}_3, \hat{a}_4$ в (73,5) и сокращаются согласно равенствам

$$\langle 0 | a_p a_p^+ | 0 \rangle = 1. \quad (73,7)$$

В зависимости от того, из которых ψ -операторов берутся $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3^+, \hat{a}_4^+$, в (73,5) возникают четыре члена

$$(73,5) = \underbrace{a_3 a_4 (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)}_{\text{свертываемые}} \underbrace{(\bar{\psi}' \gamma^\nu \psi') a_2^+ a_1^+}_{\text{свертываемые}} + \underbrace{a_3 a_4 (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)}_{\text{свертываемые}} \underbrace{(\bar{\psi}' \gamma^\nu \psi') a_2^+ a_1^+}_{\text{свертываемые}} + \underbrace{a_3 a_4 (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)}_{\text{свертываемые}} \underbrace{(\bar{\psi}' \gamma^\nu \psi') a_2^+ a_1^+}_{\text{свертываемые}} + \underbrace{a_3 a_4 (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)}_{\text{свертываемые}} \underbrace{(\bar{\psi}' \gamma^\nu \psi') a_2^+ a_1^+}_{\text{свертываемые}}, \quad (73,8)$$

где $\psi = \psi(x)$, $\psi' = \psi(x')$, а дугами соединены свертываемые операторы, т. е. те, из которых берется пара операторов \hat{a}, \hat{a}^+ для сокращения согласно (73,7). В каждом из этих членов последовательными перестановками операторов $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$ приводим сопряженные операторы к попарному соседству (\hat{a}_1, \hat{a}_1^+ и т. п.), после чего среднее значение их произведения сводится к произведению средних значений (73,7). Учитывая, что все эти операторы антикоммутиативны (1, 2, 3, 4 — различные состояния!)¹⁾, найдем, что матричный элемент (73,4) равен

$$\langle 34 | T j^\mu(x) j^\nu(x') | 12 \rangle = (\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}'_3 \gamma^\nu \psi'_1) + (\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_1) (\bar{\psi}'_4 \gamma^\nu \psi'_2) - (\bar{\psi}_3 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}'_4 \gamma^\nu \psi'_1) - (\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_1) (\bar{\psi}'_3 \gamma^\nu \psi'_2). \quad (73,9)$$

Отметим, что общий знак этой суммы условен и зависит от порядка, в котором мы расположили «внешние» электронные операторы в (73,5). Это обстоятельство соответствует тому, что общий знак матричного элемента для рассеяния тождественных фермионов вообще произволен. Относительный же знак различных членов в (73,9) от принимаемого порядка расположения внешних операторов, конечно, не зависит.

Два члена в первой и второй строках (73,9) отличаются друг от друга лишь одновременной перестановкой индексов μ, ν и ар-

¹⁾ Ввиду этой антикоммутиативности операторы $\hat{j}(x)$ и $\hat{j}(x')$ можно в данном случае считать (при вычислении матричного элемента) коммутативными и опустить знак T -произведения.

гументов x, x' . Такая перестановка не изменит, очевидно, и матричный элемент (73,3) (в котором порядок множителей все равно устанавливается символом T). Поэтому после перемножения (73,3) и (73,9) и интегрирования по $d^4x d^4x'$ четыре члена в (73,9) дают попарно одинаковый результат, так что матричный элемент

$$S_H = ie^2 \iint d^4x d^4x' \cdot D_{\mu\nu}(x-x') \{ (\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_2) (\bar{\psi}'_3 \gamma^\nu \psi'_1) - \\ - (\bar{\psi}_4 \gamma^\mu \psi_1) (\bar{\psi}'_3 \gamma^\nu \psi'_2) \} \quad (73,10)$$

{обратим внимание на исчезновение множителя $1/2!$).

Электронные волновые функции — плоские волны (64,8), поэтому выражение в фигурных скобках

$$\{ \dots \} = (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1) e^{-i(p_2-p_4)x - i(p_1-p_3)x'} - \\ - (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_2) e^{-i(p_1-p_4)x - i(p_2-p_3)x'} = \\ = \{ (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1) e^{-i[(p_2-p_4)+(p_3-p_1)]\xi/2} - \\ - (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_2) e^{-i[(p_1-p_4)+(p_3-p_2)]\xi/2} \} e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)X},$$

где $X = (x+x')/2$, $\xi = x-x'$. Интегрирование по $d^4x d^4x'$ заменяется интегрированием по $d^4\xi d^4X$. Интеграл по d^4X дает δ -функцию (в силу которой $p_1+p_2=p_3+p_4$). Перейдя затем от матрицы S к матрице M (см. § 64), получим окончательно для амплитуды рассеяния

$$M_{fi} = e^2 \{ (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) D_{\mu\nu}(p_4-p_2) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1) - \\ - (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_1) D_{\mu\nu}(p_4-p_1) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_2) \}. \quad (73,11)$$

Здесь введена фотонная функция распространения в импульсном представлении

$$D_{\mu\nu}(k) = \int D_{\mu\nu}(\xi) e^{i k \xi} d^4\xi. \quad (73,12)$$

Каждый из двух членов амплитуды (73,11) может быть символически представлен в виде так называемых *диаграмм Фейнмана*.

Первый член представляется диаграммой

$$e^2 (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) D_{\mu\nu}(k) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1) = \begin{array}{c} p_3 \swarrow \quad \searrow p_1 \\ \quad \downarrow k \\ p_4 \swarrow \quad \searrow p_2 \end{array} \quad (73,13)$$

Каждой из точек пересечения линий (*вершине* диаграммы) сопоставляется множитель γ . «Входящие» сплошные линии, направленные к вершине, отвечают начальным электронам; им сопоставляются множители u — биспинорные амплитуды соответ-

ствующих электронных состояний. «Выходящие» сплошные линии, направленные от вершин — конечные электроны; этим линиям сопоставляются множители \bar{u} . При «прочтении» диаграммы указанные множители записываются слева направо в порядке, соответствующем передвижению вдоль сплошных линий против направления стрелок. Обе вершины соединены пунктирной линией, отвечающей *виртуальному* (промежуточному) фотону, «испускаемому» в одной вершине и «поглощаемому» в другой; этой линии сопоставляется множитель — $iD_{\mu\nu}(k)$. 4-импульс виртуального фотона k определяется «сохранением 4-импульса в вершине»: равенством суммарных импульсов входящих и выходящих линий; в данном случае $k = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$. Помимо всех перечисленных множителей, диаграмме в целом приписывается еще общий множитель $(-ie)^2$ (показатель степени — число вершин в диаграмме), и в таком виде она входит слагаемым в iM_{fi} . Аналогичным образом второй член в (73,11) представляется диаграммой

$$e^2 (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_1) D_{\mu\nu}(k') (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_2) = \begin{array}{c} p_4 \swarrow \quad \nwarrow p_1 \\ \downarrow k' \\ p_3 \swarrow \quad \nwarrow p_2 \end{array} \quad (73,14)$$

(надо иметь в виду, что $k' = p_1 - p_4 = p_3 - p_2$). Безразлично, начинать ли прочтение диаграммы от конца p_3 или p_4 ; получающиеся при этом выражения совпадают друг с другом в силу симметричности тензора $D_{\mu\nu}$. Безразличен также выбор направления линии виртуального фотона: изменение этого направления приведет лишь к изменению знака k , несущественному в силу четности функций $D_{\mu\nu}(k)$ (см. § 76).

Линии, отвечающие начальным и конечным частицам, называют *внешними линиями* или *свободными концами* диаграммы. Диаграммы (73,13) и (73,14) отличаются друг от друга обменом двух свободных электронных концов (p_3 и p_4). Такая перестановка двух фермионов меняет знак диаграммы; это правило соответствует тому, что в амплитуду (73,11) оба члена входят с разными знаками.

Мы будем в дальнейшем всегда пользоваться диаграммами Фейнмана в описываемом, импульсном, представлении. Отметим, однако, что эти диаграммы могут быть приведены в соответствии с членами амплитуды рассеяния также и в их первоначальном — координатном — представлении (интегралы (73,10)). Роль электронных амплитуд при этом играют соответствующие координатные волновые функции, а пропагаторы берутся в координатном представлении. Каждой вершине отвечает одна из пере-

менных интегрирования (x или x' в (73,10)); множители, приписываемые пересекающимся в одной вершине линиям, берутся в функции этой переменной.

Рассмотрим теперь взаимное рассеяние электрона и позитрона; их начальные импульсы обозначим соответственно p_- и p_+ , а конечные p'_- и p'_+ .

Операторы рождения и уничтожения позитронов входят в ψ -операторы (73,6) вместе соответственно с операторами уничтожения и рождения электронов. В то время, как в предыдущем случае уничтожение обеих начальных частиц обеспечивалось оператором $\hat{\psi}$, а рождение обеих конечных — оператором $\hat{\bar{\psi}}$, здесь роль этих операторов противоположна по отношению к электронам и позитронам. Поэтому сопряженной функцией $\bar{\psi}(-p_+)$ будет описываться теперь начальный позитрон, а конечный позитрон — функцией $\psi(-p'_+)$ (причем обе — об 4-импульса с обратным знаком). С учетом этого различия получим в результате амплитуду рассеяния¹⁾

$$M_{fi} = -e^2 (\bar{u}(p'_-) \gamma^{\mu\nu}(p_-)) D_{\mu\nu}(p_- - p'_-) (\bar{u}(-p_+) \gamma^{\nu\mu}(-p'_+)) + e^2 (\bar{u}(-p_+) \gamma^{\mu\nu}(p_-)) D_{\mu\nu}(p_- + p_+) (\bar{u}(p'_-) \gamma^{\nu\mu}(-p'_+)). \quad (73,15)$$

Первый и второй члены в этом выражении представляются следующими диаграммами:

$$(73,16)$$

Правила составления диаграмм меняются лишь в части, касающейся позитронов. По-прежнему входящим сплошным линиям сопоставляется множитель u , а выходящим \bar{u} . Но теперь входящие линии отвечают конечным, а выходящие — начальным позитронам.

¹⁾ Для рассеяния нетождественных частиц общий знак амплитуды однозначен. Он определяется тем, что в (73,5) «внешние» операторы должны быть расположены таким образом, чтобы оба электронных оператора стояли по краям:

$$\langle 0 | a' b' \dots b^+ a^+ | 0 \rangle$$

(или же оба в середине); этим условием обеспечивается «одинаковый знак» начального и конечного состояний вакуума. Общий знак амплитуды можно проверить и по нерелятивистскому пределу: мы увидим далее (см. § 81), что в этом пределе второй член в (73,15) стремится к нулю, а первый — к борновской амплитуде резерфордского рассеяния.

тронам, причем импульсы всех позитронов берутся с обратным знаком.

Обратим внимание на различный характер двух диаграмм (73,16). В первой диаграмме в одной из вершин пересекаются линии начального и конечного электрона, в другой вершине — то же самое для позитрона. Во второй же диаграмме в каждой из вершин пересекаются линии электронов и позитронов — начальных и конечных; в верхней как бы происходит аннигиляция пары с испусканием виртуального фотона, а в нижней — рождение пары из фотона.

Это различие отражается и в свойствах виртуальных фотонов в обеих диаграммах. В первой диаграмме (диаграмма «рассеивательного» типа) 4-импульс виртуального фотона равен разности 4-импульсов двух электронов (или позитронов); поэтому $k^2 < 0$ (ср. (73,1)). Во второй же диаграмме («аннигиляционной») $k' = p_- + p_+$, и потому $k'^2 > 0$. Отметим в этой связи, что для виртуального фотона всегда $k^2 \neq 0$, в отличие от реального фотона, для которого $k^2 = 0$.

Если сталкивающиеся частицы не тождественны и не являются частицей и античастицей (скажем, электрон и мюон), то амплитуда рассеяния изобразится всего одной диаграммой:

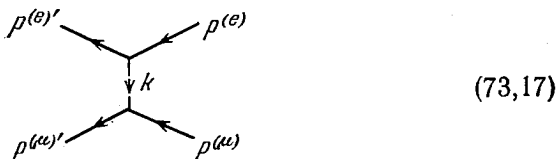


Диаграмма же аннигиляционного или обменного типа в этом случае невозможна. Мы получим этот результат аналитически, написав оператор тока как сумму электронного и мюонного токов

$$\hat{j} = \hat{j}^{(e)} + \hat{j}^{(\mu)} = (\hat{\psi}^{(e)} \gamma \hat{\psi}^{(e)}) + (\hat{\psi}^{(\mu)} \gamma \hat{\psi}^{(\mu)})$$

и взяв в произведении $\hat{j}^{(\mu)}(x) \hat{j}^{(e)}(x')$ матричные элементы от членов, производящих требуемые уничтожения и рождения частиц.

Вернемся к процессам первого порядка, запрещенным, как было указано в начале параграфа, законом сохранения 4-импульса. Матричные элементы оператора

$$\hat{S}^{(1)} = -ie \int \hat{j}(x) \hat{A}(x) d^4x \quad (73,18)$$

для таких переходов отвечают рождению или уничтожению «в одной и той же точке x » трех реальных частиц: двух электронов и одного фотона. Они возникают в результате свертывания операторов $\hat{\psi}(x)$ и $\hat{\bar{\psi}}(x)$ в одной точке x и определяются

(например, для испускания фотона) интегралами вида

$$S_{fi} = -ie \int \bar{\psi}_2(x) \psi_1(x) (\gamma A^*(x)) d^4x,$$

обращающимися в нуль благодаря наличию в подынтегральном выражении множителя $\exp[-i(p_1 - p_2 - k)x]$ с отличным от нуля показателем. На языке диаграмм это значит, что равны нулю диаграммы с тремя свободными концами



$$(73,19)$$

По этой же причине невозможны процессы второго порядка, в которых участвовали бы (в начальном и конечном состояниях) шесть частиц. В матричном элементе S_{fi} соответствующих переходов интеграл по $d^4x d^4x'$ распался бы на произведение двух обращаемых в нуль интегралов по d^4x и d^4x' от произведений трех волновых функций, взятых в одной и той же точке. Другими словами, соответствующие диаграммы распались бы на две независимые диаграммы вида (73,19).

§ 74. Диаграммы Фейнмана для рассеяния фотона

Рассмотрим другой эффект второго порядка — рассеяние фотона на электроне (*эффект Комптона*). Пусть в начальном состоянии фотон и электрон имеют 4-импульсы k_1 и p_1 , а в конечном k_2 и p_2 (а также определенные поляризации, которые для краткости не указываем).

Фотонный матричный элемент

$$\langle 2 | T A_\mu(x) A_\nu(x') | 1 \rangle = \langle 0 | c_2 T A_\mu(x) A_\nu(x') c_1^+ | 0 \rangle, \quad (74,1)$$

где

$$\hat{A} = \sum_k (\hat{c}_k A_k + \hat{c}_k^+ A_k^*).$$

Свертывая внешние и внутренние операторы, получаем

$$(74,1) = \underbrace{c_2 A_\mu A'_\nu c_1^+}_{\text{свертываем}} + \underbrace{c_2 A_\mu A'_\nu c_1^+}_{\text{свертываем}} = A_{2\mu}^* A'_{1\nu} + A_{1\mu} A_{2\nu}^* \quad (74,2)$$

(при этом учтена коммутативность операторов \hat{c}_1, \hat{c}_2^+ ; по этой же причине знак T в данном случае может быть опущен).

Электронный матричный элемент

$$\langle 2 | T j^\mu(x) j^\nu(x') | 1 \rangle = \langle 0 | a_2 T (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) (\bar{\psi}' \gamma^\nu \psi') a_1^+ | 0 \rangle. \quad (74,3)$$