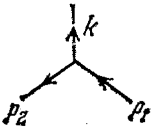
(например, для испускания фотона) интегралами вида

$$S_{fi} = -ie \int \bar{\psi}_2(x)\, \psi_1(x)\, (\gamma A^*(x))\, d^4x,$$

обращающимися в нуль благодаря наличию в подынтегральном выражении множителя $\exp[-i(p_1 - p_2 - k)x]$ с отличным от нуля показателем. На языке диаграмм это значит, что равны нулю диаграммы с тремя свободными концами


(73,19)

По этой же причине невозможны процессы второго порядка, в которых участвовали бы (в начальном и конечном состояниях) шесть частиц. В матричном элементе S_{fi} соответствующих переходов интеграл по $d^4x d^4x'$ распался бы на произведение двух обращающихся в нуль интегралов по d^4x и d^4x' от произведений трех волновых функций, взятых в одной и той же точке. Другими словами, соответствующие диаграммы распались бы на две независимые диаграммы вида (73,19).

§ 74. Диаграммы Фейнмана для рассеяния фотона

Рассмотрим другой эффект второго порядка — рассеяние фотона на электроне (*эффект Комптона*). Пусть в начальном состоянии фотон и электрон имеют 4-импульсы k_1 и p_1, а в конечном k_2 и p_2 (а также определенные поляризации, которые для краткости не указываем).

Фотонный матричный элемент

$$\langle 2 | \mathrm{T} A_\mu(x) A_\nu(x') | 1 \rangle = \langle 0 | c_2 \mathrm{T} A_\mu(x) A_\nu(x') c_1^+ | 0 \rangle, \qquad (74,1)$$

где

$$\hat{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{c}_{\mathbf{k}} A_k + \hat{c}_{\mathbf{k}}^+ A_k^*).$$

Свертывая внешние и внутренние операторы, получаем

$$(74,1) = c_2 A_\mu A'_\nu c_1^+ + c_2 A_\mu A'_\nu c_1^+ = A^*_{2\mu} A'_{1\nu} + A_{1\mu} A'^*_{2\nu} \qquad (74,2)$$

(при этом учтена коммутативность операторов $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2^+$; по этой же причине знак T в данном случае может быть опущен).

Электронный матричный элемент

$$\langle 2 | \mathrm{T} j^\mu(x)\, j^\nu(x') | 1 \rangle = \langle 0 | a_2 \mathrm{T} (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi')\, a_1^+ | 0 \rangle. \qquad (74,3)$$

В нем фигурируют четыре ψ-оператора. Только два из них будут заняты уничтожением электрона 1 и рождением электрона 2, т. е. будут свернуты с операторами $\hat{a}_1^+$ и $\hat{a}_2$. Это могут быть операторы $\hat{\bar{\psi}}'$, $\hat{\psi}$ или $\hat{\psi}'$, $\hat{\bar{\psi}}$ (но не $\hat{\psi}$, $\hat{\bar{\psi}}$ или $\hat{\psi}'$, $\hat{\bar{\psi}}'$; рождение и уничтожение в одной и той же точке x или x' двух реальных электронов вместе с одним реальным фотоном приводит к равному нулю выражению). Произведя свертывание двумя способами, получим в матричном элементе (74,3) два члена; выпишем их сначала в предположении $t > t'$:

$$(74{,}3) = a_2(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)(\bar{\psi}'\gamma^{\nu}\psi')a_1^+ + a_2(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)(\bar{\psi}'\gamma^{\nu}\psi')a_1^+. \qquad (74{,}4)$$

В первом члене свертываются операторы

$$\hat{a}_2\hat{\bar{\psi}} \to \hat{a}_2\hat{a}_2^+\bar{\psi}_2, \qquad \hat{\psi}'\hat{a}_1^+ \to \hat{a}_1\hat{a}_1^+\psi_1'.$$

Поскольку операторы $\hat{a}_2\hat{a}_2^+$ и $\hat{a}_1\hat{a}_1^+$ диагональны и стоят на краях произведения, они заменяются их средним по вакууму значением, т. е. единицей. Для аналогичного преобразования второго члена в (74,4) надо сперва «протащить» оператор $\hat{a}_2^+$ налево, а $\hat{a}_1$ направо. Это осуществляется с помощью правил коммутации операторов $\hat{a}_p$, $\hat{a}_p^+$, в силу которых

$$\begin{aligned} &\{\hat{a}_p, \hat{\psi}\}_+ = \{\hat{a}_p^+, \hat{\bar{\psi}}\}_+ = 0, \\ &\{\hat{a}_p, \hat{\bar{\psi}}\}_+ = \bar{\psi}_p, \quad \{\hat{a}_p^+, \hat{\psi}\}_+ = \psi_p. \end{aligned} \qquad (74{,}5)$$

В результате выражение (74,4) преобразуется к виду

$$\langle 0|(\bar{\psi}_2\gamma^{\mu}\hat{\psi})(\hat{\bar{\psi}}'\gamma^{\nu}\psi_1') - (\hat{\bar{\psi}}\gamma^{\mu}\psi_1)(\bar{\psi}_2'\gamma^{\nu}\hat{\psi}')|0\rangle, \qquad t > t' \qquad (74{,}6)$$

(разумеется, усреднению подвергаются лишь операторные множители). Аналогичным образом при $t < t'$ получим выражение, отличающееся перестановкой штриха и индексов μ, ν:

$$\langle 0| - (\hat{\bar{\psi}}'\gamma^{\nu}\psi_1')(\bar{\psi}_2\gamma^{\mu}\hat{\psi}) + (\bar{\psi}_2'\gamma^{\nu}\hat{\psi}')(\hat{\bar{\psi}}\gamma^{\nu}\psi_1)|0\rangle, \qquad t < t'. \qquad (74{,}7)$$

Оба выражения можно записать в едином виде, введя хронологическое произведение ψ-операторов согласно определению

$$\mathrm{T}\hat{\psi}_i(x)\hat{\bar{\psi}}_k(x') = \begin{cases} \hat{\psi}_i(x)\hat{\bar{\psi}}_k(x'), & t' < t, \\ -\hat{\bar{\psi}}_k(x')\hat{\psi}_i(x), & t' > t \end{cases} \qquad (74{,}8)$$

(i, k — биспинорные индексы). Тогда первые и вторые члены в (74,6—7) можно записать единым образом:

$$\bar{\psi}_2\gamma^\mu\langle 0|\mathrm{T}\psi\cdot\bar{\psi}'|0\rangle\gamma^\nu\psi_1' + \bar{\psi}_2'\gamma^\nu\langle 0|\mathrm{T}\psi'\cdot\bar{\psi}|0\rangle\gamma^\mu\psi_1 \qquad (74,9)$$

($\psi\cdot\bar{\psi}$ обозначает матрицу $\psi_i\bar{\psi}_k$).

Обратим внимание на то, что в естественно возникшем определении (74,8) произведения операторов при $t<t'$ и $t>t'$ берутся с различными знаками. Этим оно отличается от определения T-произведения, которым мы пользовались для операторов $\hat{A}$ и $\hat{j}$. Происхождение этого различия связано с тем, что фермионные операторы $\hat{\psi}$, $\hat{\bar{\psi}}$ антикоммутируют вне светового конуса (в отличие от коммутирующих бозонных операторов $\hat{A}$, а также билинейных операторов $\hat{j}=\hat{\bar{\psi}}\gamma\hat{\psi}$)[1]). Тем самым обеспечивается релятивистская инвариантность определения (74,8) (формальное доказательство правил коммутации ψ-операторов будет дано в § 75)[2]).

Введем *электронную функцию распространения* (или *электронный пропагатор*) — биспинор второго ранга $G_{ik}(x-x')$ — согласно определению

$$G_{ik}(x-x') = -i\langle 0|\mathrm{T}\psi_i(x)\bar{\psi}_k(x')|0\rangle. \qquad (74,10)$$

Тогда электронный матричный элемент запишется в виде

$$\langle 2|\mathrm{T}j^\mu(x)j^\nu(x')|1\rangle = i\bar{\psi}_2\gamma^\mu G\gamma^\nu\psi_1' + i\bar{\psi}_2'\gamma^\nu G\gamma^\mu\psi_1. \qquad (74,11)$$

После умножения на фотонный матричный элемент (74,1) и интегрирования по $d^4x d^4x'$ оба члена в (74,11) дают одинаковый результат, так что получается

$$S_{fi} = -ie^2\iint d^4x\,d^4x'\bar{\psi}_2(x)\gamma^\mu G(x-x')\gamma^\nu\psi_1(x')\times$$
$$\times\{A^*_{2\mu}(x)A_{1\nu}(x') + A^*_{2\nu}(x')A_{1\mu}(x)\}. \qquad (74,12)$$

Подставив для электронных и фотонных волновых функций плоские волны (64,8—9) и выделив δ-функцию, как это было

[1]) Напомним, что сами по себе ψ-операторы не отвечают каким-либо измеримым физическим величинам и потому не обязаны быть коммутативными вне светового конуса.

[2]) Аналогично можно определить T-произведение любого числа ψ-операторов. Оно равно произведению всех этих операторов, расположенных справа налево в порядке возрастания времени, причем знак определяется четностью перестановки, которую нужно произвести, чтобы получить этот порядок из порядка, указанного под знаком T-произведения. Соответственно этому определению знак T-произведения меняется при перестановке любых двух ψ-операторов, например:

$$T\hat{\psi}_i(x)\hat{\bar{\psi}}_k(x') = -T\hat{\bar{\psi}}_k(x')\hat{\psi}_i(x).$$

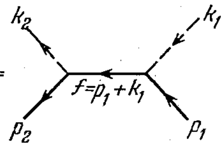
сделано для (73,10), получим окончательно амплитуду рассеяния

$$M_{fi} = -4\pi e^2 \bar{u}_2 \{(\gamma e_2^*) G(p_1 + k_1)(\gamma e_1) + (\gamma e_1) G(p_1 - k_2)(\gamma e_2^*)\} u_1, \tag{74,13}$$

где e_1, e_2 — 4-векторы поляризации фотонов, $G(p)$ — электронный пропагатор в импульсном представлении.

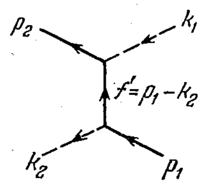
Два члена в этом выражении представляются следующими диаграммами Фейнмана:

$$4\pi e^2 \bar{u}_2 (\gamma e_2^*) G(f) (\gamma e_1) u_1 =$$



(74,14)

$$4\pi e^2 \bar{u}_2 (\gamma e_1) G(f') (\gamma e_2^*) u_1 =$$



Пунктирные свободные концы диаграмм отвечают реальным фотонам; входящим линиям (начальный фотон) сопоставляется множитель $\sqrt{4\pi}e$, а выходящим линиям (конечный фотон) — множитель $\sqrt{4\pi}e^*$, где e — 4-вектор поляризации. В первой диаграмме начальный фотон поглощается вместе с начальным электроном, а конечный испускается вместе с конечным электроном. Во второй диаграмме испускание конечного фотона происходит вместе с уничтожением начального электрона, а поглощение начального фотона — с рождением конечного электрона.

Внутренняя сплошная линия (соединяющая обе вершины) отвечает виртуальному электрону, 4-импульс которого определяется сохранением 4-импульса в вершинах. Этой линии сопоставляется множитель $iG(f)$. В отличие от 4-импульса реальной частицы квадрат 4-импульса виртуального электрона не равен m^2. Рассматривая инвариант f^2, например, в системе покоя электрона, легко найти, что

$$f^2 = (p_1 + k_1)^2 > m^2, \quad f'^2 = (p_1 - k_2)^2 < m^2. \tag{74,15}$$

§ 75. Электронный пропагатор

Введенное в предыдущих параграфах понятие о функциях распространения (пропагаторах) играет основную роль в аппарате квантовой электродинамики. Фотонный пропагатор $D_{\mu\nu}$ становится основной величиной, характеризующей взаимодействие