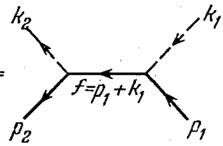
сделано для (73,10), получим окончательно амплитуду рассеяния

$$M_{fi} = -4\pi e^2 \bar{u}_2 \{(\gamma e_2^*) G(p_1 + k_1)(\gamma e_1) + (\gamma e_1) G(p_1 - k_2)(\gamma e_2^*)\} u_1, \qquad (74,13)$$

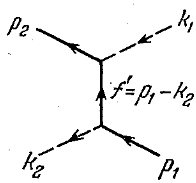
где e_1, e_2 — 4-векторы поляризации фотонов, $G(p)$ — электронный пропагатор в импульсном представлении.

Два члена в этом выражении представляются следующими диаграммами Фейнмана:

$$4\pi e^2 \bar{u}_2 (\gamma e_2^*) G(f) (\gamma e_1) u_1 =$$



$$4\pi e^2 \bar{u}_2 (\gamma e_1) G(f') (\gamma e_2^*) u_1 = \qquad (74,14)$$



Пунктирные свободные концы диаграмм отвечают реальным фотонам; входящим линиям (начальный фотон) сопоставляется множитель $\sqrt{4\pi}e$, а выходящим линиям (конечный фотон) — множитель $\sqrt{4\pi}e^*$, где e — 4-вектор поляризации. В первой диаграмме начальный фотон поглощается вместе с начальным электроном, а конечный испускается вместе с конечным электроном. Во второй диаграмме испускание конечного фотона происходит вместе с уничтожением начального электрона, а поглощение начального фотона — с рождением конечного электрона.

Внутренняя сплошная линия (соединяющая обе вершины) отвечает виртуальному электрону, 4-импульс которого определяется сохранением 4-импульса в вершинах. Этой линии сопоставляется множитель $iG(f)$. В отличие от 4-импульса реальной частицы квадрат 4-импульса виртуального электрона не равен m^2. Рассматривая инвариант f^2, например, в системе покоя электрона, легко найти, что

$$f^2 = (p_1 + k_1)^2 > m^2, \quad f'^2 = (p_1 - k_2)^2 < m^2. \qquad (74,15)$$

§ 75. Электронный пропагатор

Введенное в предыдущих параграфах понятие о функциях распространения (пропагаторах) играет основную роль в аппарате квантовой электродинамики. Фотонный пропагатор $D_{\mu\nu}$ становится основной величиной, характеризующей взаимодействие двух электронов. Эта его роль наглядно проявляется в положении, занимаемом им в амплитуде рассеяния электронов, куда $D_{\mu\nu}$ входит умноженный на токи переходов двух частиц. Аналогичную роль играет электронный пропагатор во взаимодействии электрона и фотона.

Займемся теперь фактическим вычислением пропагаторов, начав с электронного случая.

Подействуем на функцию

$$G_{ik}(x-x') = -i\langle 0|\mathrm{T}\psi_i(x)\bar{\psi}_k(x')|0\rangle \tag{75,1}$$

(i, k — биспинорные индексы) оператором $\gamma\hat{p}-m$, где $\hat{p}_\mu = i\partial_\mu$. Поскольку оператор $\hat{\psi}(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака $(\gamma\hat{p}-m)\hat{\psi}(x)=0$, мы получим нуль во всех точках x, за исключением лишь тех, в которых $t=t'$. Дело в том, что $G(x-x')$ стремится к различным пределам при $t\to t'+0$ и $t\to t'-0$: согласно определению (74,8) эти пределы равны соответственно

$$-i\langle 0|\psi_i(\mathbf{r},t)\bar{\psi}_k(\mathbf{r}',t)|0\rangle \quad \text{и} \quad +i\langle 0|\bar{\psi}_k(\mathbf{r}',t)\psi_i(\mathbf{r},t)|0\rangle$$

и, как мы увидим, на световом конусе не совпадают. Это приводит к появлению в производной $\partial G/\partial t$ дополнительного члена с δ-функцией:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -i\langle 0|\mathrm{T}\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial t}\bar{\psi}_k(x')|0\rangle + \delta(t-t')\left(G|_{t\to t'+0} - G|_{t\to t'-0}\right). \tag{75,2}$$

Замечая, что в оператор $\gamma\hat{p}-m$ производная по t входит в виде $i\gamma^0\partial/\partial t$, имеем поэтому

$$(\gamma\hat{p}-m)_{ik}G_{kl}(x-x') = \delta(t-t')\gamma^0_{ik}\langle 0|\{\psi_k(\mathbf{r},t),\ \bar{\psi}_l(\mathbf{r}',t)\}_+|0\rangle. \tag{75,3}$$

Вычислим стоящий здесь антикоммутатор. Перемножив операторы $\hat{\psi}(\mathbf{r},t)$ и $\hat{\bar{\psi}}(\mathbf{r}',t)$ (см. (73,6)) и учтя перестановочные правила для фермионных операторов $\hat{a}_\mathbf{p}$, $\hat{b}_\mathbf{p}$, найдем

$$\{\hat{\psi}_i(\mathbf{r},t),\ \hat{\bar{\psi}}_k(\mathbf{r}',t)\}_+ = \sum_\mathbf{p}\left[\psi_{pi}(\mathbf{r})\bar{\psi}_{pk}(\mathbf{r}') + \psi_{-pi}(\mathbf{r})\bar{\psi}_{-pk}(\mathbf{r}')\right], \tag{75,4}$$

где $\psi_{\pm p}(\mathbf{r})$ — волновые функции без временно́го множителя (как и в § 73, 74, для краткости не выписываем у них поляризационные индексы). Но совокупность всех функций $\psi_{\pm p}(\mathbf{r})$ — собственных функций гамильтониана электрона — составляет полную систему нормированных функций, и согласно общим свойствам таких систем (ср. III (5,12)):

$$\sum_\mathbf{p}\left[\psi_{pi}(\mathbf{r})\psi^*_{pk}(\mathbf{r}') + \psi_{-pi}(\mathbf{r})\psi^*_{-pk}(\mathbf{r}')\right] = \delta_{ik}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{75,5}$$

Сумма же в правой стороне равенства (75,4) отличается от написанной заменой ψ_k^* на $(\psi^*\gamma^0)_k$ и равна $\gamma_{ik}^0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Таким образом,

$$\{\hat{\psi}_i(\mathbf{r},t),\ \hat{\bar{\psi}}_k(\mathbf{r}',t)\}_+ = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\gamma_{ik}^0. \tag{75,6}$$

Отметим, что из этой формулы следует, в частности, упомянутое уже в § 74 утверждение об антикоммутативности операторов $\hat{\psi}$ и $\hat{\bar{\psi}}$ вне светового конуса. При $(x-x')^2<0$ всегда существует такая система отсчета, в которой $t=t'$; если при этом $\mathbf{r}\neq\mathbf{r}'$, то антикоммутатор (75,6) действительно равен нулю.

Подставив (75,6) в (75,3) (и опустив биспинорные индексы), найдем окончательно[1])

$$(\gamma\hat{p}-m)\,G(x-x') = \delta^{(4)}(x-x'). \tag{75,7}$$

Таким образом, электронный пропагатор удовлетворяет уравнению Дирака с δ-функцией в правой части. Другими словами, это есть *функция Грина* для уравнения Дирака.

Нам придется в дальнейшем иметь дело не с самой функцией $G(\xi)$ $(\xi=x-x')$, а с ее компонентами Фурье

$$G(p)=\int G(\xi)\,e^{ip\xi}\,d^4\xi \tag{75,8}$$

(пропагатором в импульсном представлении). Взяв компоненту Фурье от обеих сторон (75,7), найдем, что $G(p)$ удовлетворяет системе алгебраических уравнений

$$(\gamma p-m)\,G(p)=1. \tag{75,9}$$

Решение этой системы:

$$G(p)=\frac{\gamma p+m}{p^2-m^2}. \tag{75,10}$$

Четыре компоненты 4-вектора p в $G(p)$ являются независимыми переменными (не связанными соотношением $p^2\equiv p_0^2-\mathbf{p}^2=m^2$). Написав знаменатель в (75,10) в виде $p_0^2-(\mathbf{p}^2+m^2)$, мы увидим, что $G(p)$ как функция от p_0 при заданном $\mathbf{p}^2$ имеет два полюса: при $p_0=\pm\varepsilon$, где $\varepsilon=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$. При интегрировании по dp_0 в интеграле

$$G(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ip\xi}G(p)\,d^4p=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3p\cdot e^{i\mathbf{pr}}\int dp_0\cdot e^{-ip_0\tau}G(p) \tag{75,11}$$

[1]) В явной записи с биспинорными индексами

$$(\gamma\hat{p}-m)_{il}\,G_{lk}(x-x')=\delta^{(4)}(x-x')\,\delta_{ik}. \tag{75,7a}$$

($\tau = t - t'$) возникает поэтому вопрос о способе обхода полюсов; без указания этого способа выражение (75,10) еще по существу неопределенно.

Для выяснения этого вопроса вернемся к исходному определению (75,1). Подставим в него ψ-операторы в виде сумм (73,6), заметив при этом, что отличны от нуля средние по вакууму лишь от следующих произведений операторов рождения и уничтожения:

$$\langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{+} | 0 \rangle = 1, \quad \langle 0 | b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^{+} | 0 \rangle = 1.$$

(Поскольку в состоянии вакуума никаких частиц нет, то, прежде чем «уничтожить» частицу оператором $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ или $\hat{b}_{\mathbf{p}}$, надо «родить» ее оператором $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$ или $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{+}$.) Получим

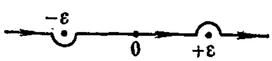
$$\begin{aligned} G_{ik}(x - x') &= -i \sum_{\mathbf{p}} \psi_{pi}(\mathbf{r}, t)\, \bar{\psi}_{pk}(\mathbf{r}', t') = \\ &= -i \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\varepsilon(t-t')} \psi_{pi}(\mathbf{r})\, \bar{\psi}_{pk}(\mathbf{r}'), \quad t - t' > 0; \\ G_{ik}(x - x') &= i \sum_{\mathbf{p}} \bar{\psi}_{-pk}(\mathbf{r}', t')\, \psi_{-pi}(\mathbf{r}, t) = \\ &= i \sum_{\mathbf{p}} e^{i\varepsilon(t-t')} \psi_{-pi}(\mathbf{r})\, \bar{\psi}_{-pk}(\mathbf{r}'), \quad t - t' < 0 \end{aligned} \tag{75,12}$$

(при $t > t'$ вклад в G дают только электронные, а при $t < t'$ — только позитронные члены).

Представив себе суммирование по $\mathbf{p}$ замененным интегрированием по d^3p и сравнив (75,12) с (75,11), мы увидим, что интеграл

$$\int e^{-ip_0\tau} G(p)\, dp_0 \tag{75,13}$$

должен иметь фазовый множитель $e^{-i\varepsilon\tau}$ при $\tau > 0$ и $e^{i\varepsilon\tau}$ при $\tau < 0$. Мы удовлетворим этому, если условимся обходить полюсы $p_0 = \varepsilon$ и $p_0 = -\varepsilon$ соответственно сверху и снизу (в плоскости комплексного переменного p_0):



(75,14)

Действительно, при $\tau > 0$ замыкаем путь интегрирования бесконечно удаленной полуокружностью в нижней полуплоскости, так что значение интеграла (75,13) будет даваться вычетом в полюсе $p_0 = +\varepsilon$; при $\tau < 0$ замыкаем контур в верхней полуплоскости, и интеграл определится вычетом в полюсе $p_0 = -\varepsilon$. В обоих случаях получится требуемый результат.

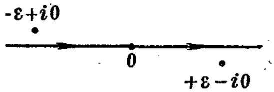
Это правило обхода (*правило Фейнмана*) можно сформулировать иначе: интегрирование производится везде вдоль самой вещественной оси, но массе частицы m приписывается бесконечно малая отрицательная мнимая часть:

$$m \to m - i0. \tag{75,15}$$

Действительно, имеем тогда

$$\varepsilon \to \sqrt{\mathbf{p}^2 + (m - i0)^2} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 - i0} = \varepsilon - i0.$$

Другими словами, полюсы $p_0 = \pm\varepsilon$ смещаются вниз и вверх от вещественной оси:



(75,16)

так что интегрирование вдоль этой оси становится эквивалентным интегрированию вдоль пути (75,14)[1]). С учетом правила (75,15) пропагатор (75,10) можно написать в виде

$$G(p) = \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i0}. \tag{75,17}$$

Правило интегрирования при сдвиге полюса демонстрируется следующим соотношением:

$$\frac{1}{x + i0} = \mathrm{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \tag{75,18}$$

Его надо понимать в том смысле, что при умножении на какую-либо функцию $f(x)$ и интегрировании имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x + i0}\, dx = \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx - i\pi f(0), \tag{75,19}$$

где перечеркнутый знак интеграла, или символ P, означает главное значение.

Функция Грина (75,10) представляет собой произведение биспинорного множителя $\gamma p + m$ и скаляра:

$$G^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}. \tag{75,20}$$

Соответствующая координатная функция $G^{(0)}(\xi)$ является, очевидно, решением уравнения

$$(\hat{p}^2 - m^2)\, G^{(0)}(x - x') = \delta^{(4)}(x - x'), \tag{75,21}$$

---

[1]) Полезно заметить, что правило сдвига полюсов соответствует тому, что $G(x - x')$ приобретает бесконечно малое затухание по $|\tau|$, где $\tau = t - t'$. Действительно, если записать значение p_0 в смещенных полюсах как $-(\varepsilon - i\delta)$ и $+(\varepsilon - i\delta)$ (где $\delta \to +0$), то временной множитель в интеграле (75,13) будет равен $\exp(-i\varepsilon|\tau| - \delta|\tau|)$.

т. е. функцией Грина уравнения $(\hat{p}^2 - m^2)\psi = 0$. В этом смысле можно сказать, что $G^{(0)}(x - x')$ есть пропагатор скалярных частиц. Легко убедиться вычислением (подобным произведенному выше), что функция распространения скалярного поля выражается через ψ-операторы (11,2) формулой

$$G^{(0)}(x - x') = -i\langle 0 | \mathrm{T}\psi(x)\psi^+(x') | 0\rangle. \qquad (75,22)$$

аналогичной определению (75,1). При этом хронологическое произведение определяется (как для всяких бозонных операторов) следующим образом:

$$\mathrm{T}\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^+(x') = \begin{cases} \hat{\psi}(x)\hat{\psi}^+(x'), & t > t' \\ \hat{\psi}^+(x')\hat{\psi}(x), & t < t'. \end{cases} \qquad (75,23)$$

(с одинаковыми знаками при $t > t'$ и $t < t'$).

§ 76. Фотонный пропагатор

До сих пор нам приходилось (в § 43, 74) использовать явный вид операторов электромагнитного поля $\hat{A}$ при нахождении матричных элементов лишь по отношению к изменению числа реальных фотонов. Для этой цели было достаточным написанное в § 2 представление потенциалов свободного поля в виде разложения по поперечным плоским волнам.

Такое представление, однако, не дает само по себе полного описания произвольного поля. Это ясно уже из того, что диаграммы рассеяния (73, 13—14) должны учитывать и кулоново взаимодействие электронов. Последнее описывается скалярным потенциалом Φ и заведомо не может быть сведено к обмену лишь поперечными виртуальными фотонами (описываемыми векторным потенциалом, подчиненным условию $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$) [1]).

Таким образом, мы по существу не имеем еще полного определения операторов $\hat{A}$, без чего невозможно прямое вычисление фотонного пропагатора согласно формуле

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i\langle 0 | \mathrm{T}A_\mu(x)A_\nu(x') | 0\rangle. \qquad (76,1)$$

С другой стороны, калибровочная неоднозначность потенциалов в значительной степени лишает физического смысла те опера-

---

[1]) При условии $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ уравнения Максвелла приводят к следующим уравнениям для $\mathbf{A}$ и Φ:

$$\Box\mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j} + \nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \qquad \Delta\Phi = -4\pi\rho.$$

В этой калибровке Φ удовлетворяет ститическому уравнению Пуассона (ср. с формулой (76,13) для D_{00} в этой же калибровке).