т. е. функцией Грина уравнения $(\hat{p}^2 - m^2)\psi = 0$. В этом смысле можно сказать, что $G^{(0)}(x - x')$ есть пропагатор скалярных частиц. Легко убедиться вычислением (подобным произведенному выше), что функция распространения скалярного поля выражается через ψ-операторы (11,2) формулой

$$G^{(0)}(x - x') = -i\langle 0 | \mathrm{T}\psi(x)\psi^{+}(x') | 0\rangle. \tag{75,22}$$

аналогичной определению (75,1). При этом хронологическое произведение определяется (как для всяких бозонных операторов) следующим образом:

$$\mathrm{T}\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^{+}(x') = \begin{cases} \hat{\psi}(x)\hat{\psi}^{+}(x'), & t > t' \\ \hat{\psi}^{+}(x')\hat{\psi}(x), & t < t'. \end{cases} \tag{75,23}$$

(с одинаковыми знаками при $t > t'$ и $t < t'$).

§ 76. Фотонный пропагатор

До сих пор нам приходилось (в § 43, 74) использовать явный вид операторов электромагнитного поля $\hat{A}$ при нахождении матричных элементов лишь по отношению к изменению числа реальных фотонов. Для этой цели было достаточным написанное в § 2 представление потенциалов свободного поля в виде разложения по поперечным плоским волнам.

Такое представление, однако, не дает само по себе полного описания произвольного поля. Это ясно уже из того, что диаграммы рассеяния (73, 13—14) должны учитывать и кулоново взаимодействие электронов. Последнее описывается скалярным потенциалом Φ и заведомо не может быть сведено к обмену лишь поперечными виртуальными фотонами (описываемыми векторным потенциалом, подчиненным условию $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$) [1].

Таким образом, мы по существу не имеем еще полного определения операторов $\hat{A}$, без чего невозможно прямое вычисление фотонного пропагатора согласно формуле

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i\langle 0 | \mathrm{T}A_{\mu}(x)A_{\nu}(x') | 0\rangle. \tag{76,1}$$

С другой стороны, калибровочная неоднозначность потенциалов в значительной степени лишает физического смысла те опера-

[1]) При условии $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ уравнения Максвелла приводят к следующим уравнениям для $\mathbf{A}$ и Φ:

$$\square\mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j} + \nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad \Delta\Phi = -4\pi\rho.$$

В этой калибровке Φ удовлетворяет ститическому уравнению Пуассона (ср. с формулой (76,13) для D_{00} в этой же калибровке).

торы, которые пришлось бы вводить для исчерпывающего квантования электромагнитного поля.

Эти затруднения, однако, имеют лишь формальный, а не физический характер, и их можно обойти, использовав некоторые общие свойства пропагатора, очевидные из требований релятивистской и калибровочной инвариантности.

Наиболее общий вид 4-тензора второго ранга, зависящего только от 4-вектора $\xi = x - x'$, есть

$$D_{\mu\nu}(\xi) = g_{\mu\nu} D(\xi^2) - \partial_\mu \partial_\nu D^{(l)}(\xi^2), \tag{76,2}$$

где D, $D^{(l)}$ — скалярные функции инварианта ξ^2 [1]). Отметим, что тензор автоматически оказывается симметричным.

Соответственно в импульсном представлении будем иметь

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2) g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu D^{(l)}(k^2), \tag{76,3}$$

где $D(k^2)$, $D^{(l)}(k^2)$ — компоненты Фурье функций $D(\xi^2)$, $D^{(l)}(\xi^2)$.

В физические величины — амплитуды рассеяния — фотонная функция распространения входит умноженной на токи переходов двух электронов, т. е. в комбинациях вида $j^\mu_{21} D_{\mu\nu} j^\nu_{43}$ (см., например, (73,13)). Но в силу сохранения тока $(\partial_\mu j^\mu = 0)$ его матричные элементы $j_{21} = \bar{\psi}_2 \gamma \psi_1$ удовлетворяют условию 4-поперечности

$$k_\mu (j^\mu)_{21} = 0, \tag{76,4}$$

где $k = p_2 - p_1$ (ср. (43,13)). Ясно поэтому, что никакие физические результаты не изменятся при замене

$$D_{\mu\nu} \to D_{\mu\nu} + \chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu, \tag{76,5}$$

где χ_μ — любые функции $\mathbf{k}$ и k_0. Этот произвол в выборе $D_{\mu\nu}$ соответствует произволу в калибровке потенциалов поля.

Произвольное калибровочное преобразование (76,5) может нарушить релятивистски инвариантный вид $D_{\mu\nu}$, предположенный в (76,3) (если величины χ_μ не составляют 4-вектора). Но и оставаясь в рамках релятивистски инвариантных форм пропагатора, мы видим, что выбор функции $D^{(l)}(k^2)$ в (76,3) вполне произволен; он не отразится на физических результатах и может устанавливаться из соображений удобства (*Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников*, 1954).

Нахождение функции распространения сводится, таким образом, к определению всего одной калибровочно-инвариантной функции $D(k^2)$. Если рассмотреть заданное значение k^2 и выбрать ось z вдоль направления $\mathbf{k}$, то преобразования (76,5) не

---

[1]) Эти функции различны в трех областях значений аргумента, не переходящих друг в друга при преобразованиях Лоренца: вне светового конуса ($\xi^2 < 0$), в верхней ($\xi^2 > 0$, $\xi_0 > 0$) и в нижний ($\xi^2 > 0$, $\xi_0 < 0$) полостях светового конуса.

будут затрагивать компоненты $D_{xx} = D_{yy} = -D(k^2)$. Достаточно поэтому вычислить всего одну компоненту D_{xx}, пользуясь при этом любой калибровкой потенциалов.

Воспользуемся калибровкой, в которой $\operatorname{div}\hat{\mathbf{A}} = 0$ и оператор $\hat{\mathbf{A}}$ дается разложением (2,17—18):

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \left(\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{e}^{(\alpha)}e^{-ikx} + \hat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{e}^{(\alpha)*}e^{ikx}\right), \quad \omega = |\mathbf{k}| \tag{76,6}$$

(индекс $\alpha = 1, 2$ нумерует поляризации). Из всех средних по вакууму значений произведений операторов $\hat{c}$, $\hat{c}^{+}$ отличны от нуля лишь

$$\langle 0 | c_{\mathbf{k}\alpha} c^{+}_{\mathbf{k}\alpha} | 0 \rangle = 1.$$

По определению (76,1) получим поэтому

$$D_{ik}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{2\pi i\, d^3k}{\omega} \left(\sum_{\alpha} e_i^{(\alpha)} e_k^{(\alpha)*}\right) e^{-i\omega|\tau| + i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}} \tag{76,7}$$

(i, k — трехмерные векторные индексы; от суммирования по $\mathbf{k}$ мы перешли к интегрированию по $d^3k/(2\pi)^3$). Тот факт, что в показателе экспоненты стоит абсолютное значение разности $\tau = t - t'$, есть следствие хронологизации произведения операторов в (76,1).

Из (76,7) видно, что подынтегральное выражение без множителя $e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}}$ есть компонента трехмерного разложения Фурье функции $D_{ik}(\mathbf{r}, t)$. Для $D_{xx} = -D$ она равна

$$\frac{2\pi i}{\omega} e^{-i\omega|\tau|} \sum_{\alpha} |e_x^{(\alpha)}|^2 = \frac{2\pi i}{\omega} e^{-i\omega|\tau|}.$$

Для нахождения $D_{xx}(k^2)$ осталось разложить эту функцию в интеграл Фурье по времени. Это разложение дается формулой

$$\frac{2\pi i}{\omega} e^{-i\omega|\tau|} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 + i0} e^{-ik_0\tau}\, dk_0.$$

Как было объяснено в предыдущем параграфе, такое интегрирование подразумевает обход полюсов $k_0 = \pm|\mathbf{k}| = \pm\omega$ соответственно снизу и сверху; при $\tau > 0$ интеграл определяется вычетом в полюсе $k_0 = +\omega$, а при $\tau < 0$ — вычетом в полюсе $k_0 = -\omega$.

Таким образом, находим окончательно

$$D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0}. \tag{76,8}$$

Появление $+i0$ в знаменателе, к которому в изложенном выводе мы пришли автоматически, совпадает с правилом (75,15): из (равной нулю) массы фотона вычитается $i0$. Из (76,8) видно, что соответствующая координатная функция $D(\xi^2)$ удовлетворяет уравнению

$$-\partial_\mu \partial^\mu D(x-x') = 4\pi\delta^{(4)}(x-x'), \tag{76,9}$$

т. е. является функцией Грина волнового уравнения.

Мы будем обычно полагать $D^{(l)}=0$, т. е. пользоваться функцией распространения в виде

$$D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2+i0} g_{\mu\nu} \tag{76,10}$$

(*калибровка Фейнмана*).

Укажем также другие способы калибровки, которые могут представить определенные преимущества в некоторых применениях.

Положив $D^{(l)}=-D/k^2$, получим пропагатор в виде

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \tag{76,11}$$

(*калибровка Ландау*). При этом $D_{\mu\nu}k^\nu = 0$. Такой выбор аналогичен лоренцевой калибровке потенциалов ($A_\mu k^\mu = 0$).

Калибровке потенциалов трехмерным условием $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$ аналогична калибровка пропагатора условиями

$$D_{il}k^l = 0, \quad D_{0l}k^l = 0.$$

Вместе с равенством $D_{xx} = -D = -4\pi/k^2$ эти условия дают

$$D_{il} = -\frac{4\pi}{\omega^2-\mathbf{k}^2}\left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\mathbf{k}^2}\right). \tag{76,12}$$

Для того чтобы получить такое D_{il}, надо произвести над пропагатором (76,10) преобразование (76,5), положив

$$\chi_0 = -\frac{4\pi\omega}{2(\omega^2-\mathbf{k}^2)\mathbf{k}^2}, \quad \chi_i = \frac{4\pi k_i}{2(\omega^2-\mathbf{k}^2)\mathbf{k}^2}.$$

При этом для остальных компонент $D_{\mu\nu}$ получается

$$D_{00} = -4\pi/\mathbf{k}^2, \quad D_{0i} = 0. \tag{76,13}$$

Такую калибровку называют кулоновой (*E. Salpeter*, 1952); отметим, что D_{00} здесь — компонента Фурье кулонова потенциала.

Наконец, калибровке потенциалов условием $\Phi=0$ аналогична калибровка пропагатора, в которой

$$D_{il} = -\frac{4\pi}{\omega^2-\mathbf{k}^2}\left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\omega^2}\right), \quad D_{0i} = D_{00} = 0. \tag{76,14}$$

Эта форма оказывается удобной для применения в нерелятивистских задачах (*И. Е. Дзялошинский, Л. П. Питаевский*, 1959).

Все выписанные выражения относятся к импульсному представлению пропагатора. В некоторых случаях удобно пользоваться смешанным частотно-координатным представлением, т. е. функцией

$$D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{r}) = \int D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{k})\, e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{76,15}$$

В фейнмановской калибровке (76,10)

$$D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{r}) = g_{\mu\nu} D(\omega, \mathbf{r}),$$

где

$$D(\omega, \mathbf{r}) = 4\pi \int \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 + i0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = -\frac{i}{\pi r} \int\limits_0^\infty \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{\omega^2 - k^2 + i0}\, k\, dk,$$

или, после замены $k \to -k$ во втором слагаемом подынтегрального выражения:

$$D(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{i}{\pi r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}\, k\, dk}{\omega^2 - k^2 + i0},$$

Последнее интегрирование производится путем замыкания контура интегрирования бесконечно удаленной полуокружностью в верхней полуплоскости комплексной переменной k и сводится к взятию вычета в полюсе $k = |\omega| + i0$. Окончательно получим

$$D(\omega, \mathbf{r}) = -e^{i|\omega| r}/r. \tag{76,16}$$

В связи с этим выражением сделаем следующее замечание. Описываемый диаграммами (73,13—14) процесс можно рассматривать наглядно как рассеяние электрона 2 в поле, создаваемом электроном 1 (или наоборот). Функция (76,16) соответствует обычному «запаздывающему» потенциалу $\propto e^{i\omega r}$ (см. II (64,1—2)) только при $\omega > 0$. Знак ω, однако, зависит от условного выбора направления стрелки k на диаграмме. Отмеченное свойство функции $D(\omega, \mathbf{r})$ означает, что в квантовой электродинамике следует считать источником поля ту из частиц, которая отдает энергию, т. е. испускает виртуальный фотон.

В заключение остановимся на вопросе о пропагаторе частиц со спином 1, но с отличной от нуля массой. В этом случае калибровочный произвол отсутствует и выбор пропагатора однозначен.

Подставив ψ-операторы (14,16) в определение

$$G_{\mu\nu} = -i\langle 0 | T\psi_\mu(x)\, \psi_\nu^+(x') | 0\rangle, \tag{76,17}$$

получим выражение, отличающееся от (76,7) лишь заменой стоящей в подынтегральном выражении суммы по поляризациям на

$$\sum_{\alpha} u_{\mu}^{(\alpha)} u_{\nu}^{(\alpha)*}.$$

Суммирование по поляризациям эквивалентно усреднению с последующим умножением на 3 — число независимых поляризаций. Усреднение дает матрицу плотности неполяризованных частиц (14,15). Таким образом, в результате найдем следующее выражение для пропагатора векторных частиц:

$$G_{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{p^2 - m^2 + i0}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right). \qquad (76,18)$$

Обратим внимание на аналогичную структуру пропагаторов (75,17) и (76,18): в знаменателе стоит разность $p^2 - m^2$, а числитель есть, с точностью до множителя, матрица плотности неполяризованных частиц с данным спином.

§ 77. Общие правила диаграммной техники

Произведенное в § 73, 74 для некоторых простых случаев вычисление элементов матрицы рассеяния содержит в себе все принципиальные моменты общего метода. Не представляет особого труда установить путем соответствующих обобщений правила вычисления матричных элементов в любом порядке теории возмущений.

Как уже указывалось, матричный элемент оператора рассеяния $\hat{S}$ для перехода между любыми начальными и конечными состояниями совпадает со средним по вакууму от оператора, получающегося умножением $\hat{S}$ справа на операторы рождения всех начальных частиц и слева — на операторы уничтожения всех конечных частиц.

В результате такого приведения элемент S-матрицы в n-м порядке теории возмущений принимает вид

$$\langle f|S^{(n)}|i\rangle = \frac{1}{n!}\langle 0|\ldots b_{2f}b_{1f}\ldots a_{1f}\ldots c_{1f}\times$$
$$\times\int d^4x_1\ldots d^4x_n \mathrm{T}\{(\bar{\psi}_1(-ie\gamma A_1)\psi_1)\ldots(\bar{\psi}_n(-ie\gamma A_n)\psi_n)\}\times$$
$$\times c_{1i}^{+}\ldots a_{1i}^{+}\ldots b_{1i}^{+}\ldots|0\rangle \qquad (77,1)$$

(индексы $1i$, $2i$, ... нумеруют начальные частицы (отдельно позитроны, электроны, фотоны), индексы $1f$, $2f$, ... — конечные частицы; индексы 1, 2, ... у операторов $\hat{\psi}$ и $\hat{A}$ означают: $\hat{\psi}_1 = \hat{\psi}(x_1)$, ...). Входящие сюда операторы $\hat{\psi}$, $\hat{A}$ представляют собой линейные комбинации операторов рождения и уничтожения соответствующих частиц в различных состояниях. Таким обра-