получим выражение, отличающееся от (76,7) лишь заменой стоящей в подынтегральном выражении суммы по поляризациям на

$$\sum_{\alpha} u_\mu^{(\alpha)} u_\nu^{(\alpha)*}.$$

Суммирование по поляризациям эквивалентно усреднению с последующим умножением на 3 — число независимых поляризаций. Усреднение дает матрицу плотности неполяризованных частиц (14,15). Таким образом, в результате найдем следующее выражение для пропагатора векторных частиц:

$$G_{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{p^2 - m^2 + i0}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right). \tag{76,18}$$

Обратим внимание на аналогичную структуру пропагаторов (75,17) и (76,18): в знаменателе стоит разность $p^2 - m^2$, а числитель есть, с точностью до множителя, матрица плотности неполяризованных частиц с данным спином.

§ 77. Общие правила диаграммной техники

Произведенное в § 73, 74 для некоторых простых случаев вычисление элементов матрицы рассеяния содержит в себе все принципиальные моменты общего метода. Не представляет особого труда установить путем соответствующих обобщений правила вычисления матричных элементов в любом порядке теории возмущений.

Как уже указывалось, матричный элемент оператора рассеяния $\hat{S}$ для перехода между любыми начальными и конечными состояниями совпадает со средним по вакууму от оператора, получающегося умножением $\hat{S}$ справа на операторы рождения всех начальных частиц и слева — на операторы уничтожения всех конечных частиц.

В результате такого приведения элемент S-матрицы в n-м порядке теории возмущений принимает вид

$$\langle f | S^{(n)} | i \rangle = \frac{1}{n!}\langle 0 | \ldots b_{2f} b_{1f} \ldots a_{1f} \ldots c_{1f} \times$$
$$\times \int d^4x_1 \ldots d^4x_n \mathrm{T}\{(\bar{\psi}_1(-ie\gamma A_1)\psi_1) \ldots (\bar{\psi}_n(-ie\gamma A_n)\psi_n)\} \times$$
$$\times c_{1i}^{+} \ldots a_{1i}^{+} \ldots b_{1i}^{+} \ldots | 0 \rangle \tag{77,1}$$

(индексы $1i$, $2i$, ... нумеруют начальные частицы (отдельно позитроны, электроны, фотоны), индексы $1f$, $2f$, ... — конечные частицы; индексы 1, 2, ... у операторов $\hat{\psi}$ и $\hat{A}$ означают: $\hat{\psi}_1 = \hat{\psi}(x_1)$, ...). Входящие сюда операторы $\hat{\psi}$, $\hat{A}$ представляют собой линейные комбинации операторов рождения и уничтожения соответствующих частиц в различных состояниях. Таким образом, получаем для матричных элементов выражения в виде средних по вакууму от произведений операторов рождения и уничтожения частиц и их линейных комбинаций. Вычисление таких средних осуществляется с помощью следующих утверждений, составляющих содержание *теоремы Вика* (*G. C. Wick*, 1950).

1. Среднее по вакууму от произведения любого числа бозонных операторов $\hat{c}^+$, $\hat{c}$ равно сумме произведений всех возможных попарных средних (сверток) этих операторов. При этом в каждой паре множители должны стоять в той же последовательности, что и в первоначальном произведении.

2. Для фермионных операторов $\hat{a}^+$, $\hat{a}$, $\hat{b}^+$, $\hat{b}$ (одних и тех же или различных частиц) правило меняется лишь в том, что каждый член входит в сумму со знаком плюс или минус в зависимости от четности или нечетности числа перестановок фермионных операторов, необходимых для того, чтобы поставить рядом все попарно усредняемые операторы.

Ясно, что среднее значение может быть отлично от нуля, лишь если наряду с каждым множителем $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ в произведении имеется также по множителю $\hat{a}^+$, $\hat{b}^+$, $\hat{c}^+$. При этом свертывать следует только пары операторов $(\hat{a}, \hat{a}^+)$, ..., относящихся к одинаковым состояниям, причем лишь такие, в которых $\hat{a}^+$, ... стоят справа от $\hat{a}$, ... : частица сначала рождается, а затем уничтожается (средние же значения $\langle 0|a^+a|0\rangle = 0$, ...).

Если каждая пара $(\hat{a}, \hat{a}^+)$, ... входит в произведение всего по одному разу, то теорема Вика очевидна (среднее значение сводится при этом к одному произведению попарных средних). Она очевидна также и в случае, когда все операторы уничтожения стоят в произведении справа от операторов рождения (такое произведение называют *нормальным*); среднее значение при этом равно нулю. Отсюда легко путем полной индукции доказать теорему Вика для общего случая, когда одна и та же пара операторов входит в произведение несколько (k) раз.

Рассмотрим среднее значение $\langle 0|..cc^+..|0\rangle$, в котором пара бозонных операторов входит k раз (для фермионных операторов дальнейшие рассуждения вполне аналогичны). Переставив множители $\hat{c}$, $\hat{c}^+$ в некоторой паре, получим на основании правил коммутации

$$\langle 0|\,..\,cc^+\,..\,|0\rangle = \langle 0|\,..\,c^+c\,..\,|0\rangle + \langle 0|\,..\,1\,..\,|0\rangle. \qquad (77,2)$$

Среднее значение $\langle 0|..1..|0\rangle$ содержит $k-1$ пару, и для него теорема Вика предполагается справедливой. С другой стороны, если раскрывать среднее значение $\langle 0|..cc^+..|0\rangle$ по теореме Вика, то оно будет отличаться от среднего значения $\langle 0|..c^+c..|0\rangle$ как раз членом

$$\langle 0|\,..\,1\,..\,|0\rangle\langle 0|cc^+|0\rangle = \langle 0|\,..\,1\,..\,|0\rangle$$

(при раскрытии $\langle 0|..c^+c..|0\rangle$ аналогичный член $\langle 0|..1..|0\rangle \times \times \langle 0|c^+c|0\rangle = 0$). Поэтому из (77,2) следует, что если теорема Вика справедлива для матричного элемента $\langle 0|..c^+c..|0\rangle$, то она остается справедливой и после перестановки $\hat{c}$ и $\hat{c}^+$. Поскольку для одного определенного (нормального) порядка множителей теорема Вика заведомо справедлива, то она тем самым верна в любом случае.

Будучи верна для произведений операторов $\hat{a}$, $\hat{b}$, ..., теорема Вика верна и для любых произведений, содержащих наряду с самими $\hat{a}$, $\hat{b}$, ... также их линейные комбинации $\hat{\psi}$, $\hat{\bar{\psi}}$, $\hat{A}$. Применив эту теорему к матричному элементу (77,1), мы представим его в виде суммы членов, каждый из которых будет произведением некоторых попарных средних. Среди последних будут встречаться свертки операторов $\hat{\psi}$, $\hat{\bar{\psi}}$, $\hat{A}$ с «внешними» операторами — операторами рождения начальных или уничтожения конечных частиц. Эти свертки выражаются через волновые функции начальных и конечных частиц согласно формулам:

$$\begin{aligned} &\langle 0|Ac^+_{\mathbf{p}}|0\rangle = A_p, \qquad &&\langle 0|c_{\mathbf{p}}A|0\rangle = A^*_p, \\ &\langle 0|\psi a^+_{\mathbf{p}}|0\rangle = \psi_p, \qquad &&\langle 0|a_{\mathbf{p}}\bar{\psi}|0\rangle = \psi^*_p, \\ &\langle 0|b_{\mathbf{p}}\psi|0\rangle = \psi_{-p}, \qquad &&\langle 0|\bar{\psi}b^+_{\mathbf{p}}|0\rangle = \bar{\psi}_{-p}, \end{aligned} \tag{77,3}$$

где A_p, ψ_p — фотонные и электронные волновые функции с импульсами $\mathbf{p}$ (поляризационные индексы, как и в § 73, 74, для краткости не выписываем). Будут также встречаться свертки «внутренних» операторов, стоящих под знаком T-произведений. Поскольку при применении теоремы Вика последовательность множителей в каждой свертываемой паре сохраняется, в этих свертках сохранится хронологическая последовательность операторов, так что они заменяются соответствующими пропагаторами[1]).

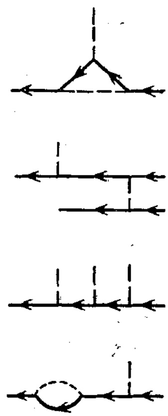
Каждый из членов суммы, на которую разбивается матричный элемент в результате его раскрытия по теореме Вика,

[1]) По поводу последнего утверждения надо сделать следующее замечание. При доказательстве теоремы Вика мы использовали правила коммутации операторов $\hat{c}$, $\hat{c}^+$, которые имеют смысл лишь для реальных («поперечных») фотонов. «Внешние» операторы $\hat{c}^+_i$, $\hat{c}_f$ отвечают, разумеется, именно таким (начальным и конечным) фотонам. Операторы же $\hat{A}$ (входящие под знаком T-произведения) описывают, как было указано в § 76, не только поперечные фотоны. Ситуация здесь такая же, как и при вычислении $D_{\mu\nu}$ в § 76. В силу релятивистской и калибровочной инвариантности достаточно доказать теорему для тех произведений (т. е. компонент тензора $\langle 0|TA_\mu A_\nu \ldots|0\rangle$), которые определяются поперечными частями потенциалов. Тем самым она будет доказана и для любых произведений.

изображается определенной диаграммой Фейнмана. В диаграмме n-го приближения содержится n вершин, каждой из которых ставится в соответствие одна из переменных интегрирования — один из 4-векторов x_1, x_2, ... В каждой вершине сходится три луча — два сплошных (электронных) и один пунктирный (фотонный), которым соответствуют электронные ($\hat{\psi}$ и $\hat{\bar{\psi}}$) и фотонный ($\hat{A}$) операторы как функции одной и той же переменной x. При этом оператору $\hat{\psi}$ соответствует приходящая в вершину, а $\hat{\bar{\psi}}$ — выходящая из нее линия.

Для иллюстрации приведем несколько примеров соответствия между членами матричного элемента третьего приближения и диаграммами. Опустив знак интеграла, знаки операторов и знак T, а также множители $-ie\gamma$ и не выписав аргументов у операторов, напишем эти члены символически в виде

$$
\begin{aligned}
&а\quad (\bar{\psi}A\psi)(\bar{\psi}A\psi)(\bar{\psi}A\psi) = \\
&б\quad (\bar{\psi}A\psi)(\bar{\psi}A\psi)(\bar{\psi}A\psi) = \\
&в\quad (\bar{\psi}A\psi)(\bar{\psi}A\psi)(\bar{\psi}A\psi) = \\
&г\quad (\bar{\psi}A\psi)(\bar{\psi}A\psi)(\bar{\psi}A\psi) =
\end{aligned}
\qquad (77,4)
$$

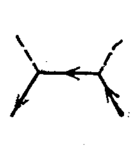


Для наглядности электронные и фотонные свертки изображены, как и на диаграмме, соответственно сплошными и пунктирными дугами. Направление стрелок на электронных свертках (от $\hat{\bar{\psi}}$ к $\hat{\psi}$) соответствует их направлению на диаграммах. Для внутренних фотонных сверток направление безразлично (что проявляется и в четности фотонного пропагатора как функции $x - x'$).

Среди получаемых таким образом членов есть эквивалентные, различающиеся лишь перестановкой номеров вершин — соответствием между вершинами и номерами переменных $x_1, x_2, \ldots$, т. е. попросту обозначением переменных интегрирования. Число таких перестановок равно $n!$. Оно сокращает множитель $1/n!$ в (77,1), после чего учитывать диаграммы с перестановкой вершин уже не надо. С этим обстоятельством мы уже сталкивались в

§ 73, 74. Так, эквивалентны две диаграммы второго приближения:

$$\left.\begin{array}{l}(\bar\varphi A\varphi)(\bar\varphi A\varphi) = \\ (\bar\varphi A\varphi)(\bar\varphi A\varphi) = \end{array}\right\}$$



(77,5)

В (77,4) и (77,5) изображены только внутренние свертки, которым соответствуют внутренние линии диаграмм (виртуальные электроны и фотоны). Оставшиеся свободными операторы свертываются с теми или иными внешними операторами, в результате чего устанавливается соответствие между свободными концами диаграмм и теми или иными начальными и конечными частицами. При этом $\hat{\bar\psi}$ (свертываясь с операторами $\hat a_f$ или $\hat b_i^+$) дает линию конечного электрона или начального позитрона, а $\hat\psi$ (свертываясь с $\hat a_i^+$ или $\hat b_f$) — начального электрона или конечного позитрона. Свободный оператор $\hat A$ (свертываясь с $\hat c_i^+$ или $\hat c_f$) может соответствовать как начальному, так и конечному фотонам. Таким образом, получается по нескольку топологически одинаковых (т. е. состоящих из одинакового числа одинаково расположенных линий) диаграмм, отличающихся лишь перестановками начальных и конечных частиц по входящим и выходящим свободным концам.

Каждая такая перестановка эквивалентна, очевидно, определенной перестановке внешних операторов $\hat a$, $\hat b$, ... в (77,1). Ясно поэтому, что если среди начальных или среди конечных частиц имеются тождественные фермионы, то относительные знаки диаграмм, различающихся нечетным числом перестановок свободных концов, должны быть противоположны.

Непрерывающаяся последовательность сплошных линий на диаграммах составляет электронную линию, вдоль которой стрелки сохраняют непрерывное направление. Такая линия может либо иметь два свободных конца, либо образовывать замкнутую петлю. Так, диаграмма

$$(\bar\varphi A\varphi)(\bar\varphi A\varphi) =$$ 

имеет петлю с двумя вершинами. Сохранение направления вдоль электронной линии является графическим выражением сохранения заряда: «входящий» в каждую вершину заряд равен «выходящему» из нее заряду.

Расположение биспинорных индексов вдоль непрерывной электронной линии соответствует записи матриц слева направо при движении против стрелок. Биспинорные индексы разных электронных линий никогда не перепутываются. Вдоль незамкнутой линии последовательность индексов заканчивается у свободных концов на электронных (или позитронных) волновых функциях. На замкнутой же петле последовательность индексов тоже замыкается, т. е. петле соответствует след произведения расположенных вдоль нее матриц. Легко видеть, что этот след должен быть взят со знаком минус.

Действительно, петле с k вершинами отвечает совокупность k сверток

$$(\bar{\psi}A\psi)(\bar{\psi}A\psi)\ldots(\bar{\psi}A\psi)$$

(или другая эквивалентная, отличающаяся перестановкой вершин). В $(k-1)$-й свертке операторы $\hat{\psi}$ и $\hat{\bar{\psi}}$ уже стоят рядом в том порядке ($\hat{\bar{\psi}}$ справа от $\hat{\psi}$), в котором они должны стоять в электронном пропагаторе. Операторы же, стоящие по краям, приводятся в соседство с помощью четного числа перестановок с другими ψ-операторами и после этого оказываются расположенными в порядке $\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}$.

Поскольку

$$\langle 0|T\bar{\psi}'\psi|0\rangle = -\langle 0|T\psi\bar{\psi}'|0\rangle$$

(ср. примеч. на с. 336), то замена этой свертки соответствующим пропагатором связана с изменением общего знака всего выражения.

Переход к импульсному представлению в общем случае производится вполне аналогично тому, как это было сделано в § 73, 74. Наряду с общим законом сохранения 4-импульса должны соблюдаться также «законы сохранения» в каждой вершине. Однако всех этих законов может оказаться недостаточно для однозначного определения импульсов всех внутренних линий диаграммы. В таких случаях по всем оставшимся неопределенными внутренним импульсам остаются интегрирования (по $d^4p/(2\pi)^4$), производящиеся по всему p-пространству (в том числе и по p_0 от $-\infty$ до $+\infty$).

В изложенных рассуждениях подразумевалось, что роль возмущения играет взаимодействие между самими частицами, «активно» участвующими в реакции (т. е. между частицами, состояние которых в результате процесса меняется). Аналогичным образом рассматривается также случай, когда в задаче фигурирует внешнее электромагнитное поле, т. е. поле, создаваемое «пассивными» частицами, состояние которых при данном процессе не меняется.

Пусть $A^{(e)}(x)$ — 4-потенциал внешнего поля. Он входит в лагранжиан взаимодействия вместе с фотонным оператором $\hat{A}$ в виде суммы $\hat{A}+A^{(e)}$ (которая и перемножается с оператором тока $\hat{j}$). Поскольку $A^{(e)}$ не содержит никаких операторов, он не может образовывать сверток с другими операторами. Иначе говоря, внешнему полю будут соответствовать в диаграммах Фейнмана лишь внешние линии.

Представим $A^{(e)}$ в виде интеграла Фурье:

$$A^{(e)}(x)=\int A^{(e)}(q)\,e^{-iqx}\frac{d^4q}{(2\pi)^4},\qquad A^{(e)}(q)=\int A^{(e)}(x)\,e^{iqx}\,d^4x. \tag{77,6}$$

В выражениях для матричных элементов в импульсном представлении 4-вектор q будет фигурировать наряду с 4-импульсами других внешних линий, отвечающих реальным частицам. Каждой такой линии внешнего поля сопоставляется множитель $A^{(e)}(q)$, причем линию надо рассматривать как «входящую» — в соответствии со знаком показателя в множителе e^{-iqx}, с которым $A^{(e)}(q)$ входит в интеграл Фурье («выходящей» же линии надо было бы сопоставить множитель $A^{(e)*}(q)$). Если при этом окажется, что закон сохранения 4-импульса не фиксирует (при заданных 4-импульсах всех реальных частиц) однозначным образом 4-импульсы всех линий внешнего поля, то по остающимся «свободными» q производится интегрирование (по $d^4q/(2\pi)^4$), как и по всем другим не фиксированным 4-импульсам линий диаграммы.

Если внешнее поле не зависит от времени, то

$$A^{(e)}(q)=2\pi\delta(q^0)\,A^{(e)}(\mathbf{q}), \tag{77,7}$$

где $A^{(e)}(\mathbf{q})$ — трехмерная компонента Фурье:

$$A^{(e)}(\mathbf{q})=\int A^{(e)}(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{qr}}\,d^3x. \tag{77,8}$$

В этом случае внешней линии сопоставляется множитель $A^{(e)}(\mathbf{q})$ и ей приписывается 4-импульс $q^\mu=(0,\mathbf{q})$; энергии электронных линий, пересекающихся (вместе с линией поля) в вершине, при этом одинаковы в силу закона сохранения. По всем остающимся нефиксированными трехмерным импульсам $\mathbf{p}$ внутренних линий должно производиться интегрирование по $d^3p/(2\pi)^3$. Вычисленная таким образом амплитуда M_{fi} определяет, например, сечение рассеяния (64,25).

Дадим сводку окончательных правил *диаграммной техники*, по которым составляется выражение для амплитуды рассеяния (точнее — выражение для iM_{fi}) в импульсном представлении.

1. Приближению n-го порядка теории возмущений отвечают диаграммы с n вершинами, в каждой из которых сходятся одна входящая и одна выходящая электронные (сплошные) и одна фотонная (пунктирная) линии. В амплитуду процесса рассеяния входят все диаграммы, имеющие свободные концы (внешние линии) в числе, равном числу начальных и конечных частиц.

2. Каждой внешней входящей сплошной линии сопоставляется амплитуда начального электрона $u(p)$ или конечного позитрона $u(-p)$ (p — 4-импульс частицы). Каждой выходящей сплошной линии сопоставляется амплитуда конечного электрона $\bar{u}(p)$ или начального позитрона $\bar{u}(-p)$.

3. Каждой вершине сопоставляется 4-вектор $-ie\gamma^\mu$.

4. Каждой внешней входящей пунктирной линии сопоставляется амплитуда начального фотона $\sqrt{4\pi}\,e_\mu$, а выходящей линии — амплитуда $\sqrt{4\pi}\,e^*_\mu$ конечного фотона (e — 4-вектор поляризации). Векторный индекс μ совпадает с индексом матрицы γ^μ в соответствующей вершине (так что возникает скалярное произведение γe или γe^*).

5. Каждой внутренней сплошной линии сопоставляется множитель $iG(p)$, а внутренней пунктирной линии — множитель $-iD_{\mu\nu}(p)$. Тензорные индексы $\mu\nu$ совпадают с индексами матриц γ^μ, γ^ν в вершинах, соединяемых пунктирной линией.

6. Вдоль каждой непрерывной последовательности электронных линий стрелки имеют неизменное направление, а расположение биспинорных индексов вдоль них соответствует записи матриц слева направо при движении против стрелок. Замкнутой электронной петле отвечает след произведения расположенных вдоль нее матриц.

7. В каждой вершине 4-импульсы пересекающихся в ней линий удовлетворяют закону сохранения, т. е. сумма импульсов входящих линий равна сумме импульсов выходящих линий. Импульсы свободных концов — заданные (с соблюдением общего закона сохранения) величины, причем позитронной линии приписывается импульс $-p$. По импульсам внутренних линий, остающимся нефиксированными после учета законов сохранения во всех вершинах, производится интегрирование (по $d^4p/(2\pi)^4$).

8. Входящему свободному концу, отвечающему внешнему полю, сопоставляется множитель $A^{(e)}(q)$; 4-вектор q связан с 4-импульсами других линий законом сохранения в вершине. Если поле не зависит от времени, свободному концу сопоставляется множитель $A^{(e)}(\mathbf{q})$, а по остающимся нефиксированными трехмерным импульсам внутренних линий производится интегрирование по $d^3p/(2\pi)^3$.

9. Дополнительный множитель -1 привносится в выражение для iM_{fi} каждой замкнутой электронной петлей в диаграмме

и каждой парой позитронных внешних концов, если эти концы — начало и конец одной последовательности сплошных линий. Если среди начальных или среди конечных частиц имеется несколько электронов или позитронов, то относительный знак диаграмм, различающихся нечетным числом перестановок пар тождественных частиц (т. е. соответствующих им внешних концов), должен быть противоположным.

Для уточнения последнего правила добавим, что одинаковыми знаками должны во всяком случае обладать диаграммы с одинаковыми сплошными линиями, т. е. диаграммы, которые оказались бы тождественными после снятия с них всех фотонных линий. Напомним также, что при наличии тождественных фермионов общий знак амплитуды условен.

§ 78. Перекрестная инвариантность

Представление амплитуд рассеяния M_{fi} интегралами Фейнмана обнаруживает их замечательную симметрию, состоящую в следующем.

Любую из входящих внешних линий диаграммы Фейнмана можно рассматривать (без изменения ее направления) как частицу в начальном или античастицу в конечном состоянии, а каждую выходящую линию — как конечную частицу или начальную античастицу. Одновременно с переходом от частицы к античастице меняется также и смысл приписываемого линии 4-импульса p: $p = p_э$ для частицы (скажем, электрона) и $p = -p_п$ для позитрона. Меняется также и приписываемая частице поляризация. Поскольку входящей внешней линии должна сопоставляться волновая амплитуда u, а выходящей u^*, для электрона $u = u_э$, а для позитрона $u = u^*_п$. Но переход от u к u^* означает изменение знака проекции спина частицы (или ее спиральности).

Для фотона, как истинно нейтральной частицы, изменение смысла внешней линии означает просто переход от испускания фотона к его поглощению или наоборот: внешняя фотонная линия с импульсом k отвечает либо поглощению фотона с импульсом $k_{погл} = k$, либо испусканию фотона с импульсом $k_{исп} = -k$ и с противоположным знаком спиральности.

Такое изменение смысла внешних линий эквивалентно переходу от одного перекрестного канала реакции к другим каналам. Отсюда следует, что одна и та же амплитуда как функция импульсов свободных концов диаграмм описывает все каналы реакции[1]). В зависимости от канала меняется лишь смысл

[1]) Если тот или иной канал запрещен сохранением 4-импульса, то вероятность перехода автоматически обращается в нуль δ-функцией, фигурирующей в (64,5) в качестве общего множителя.