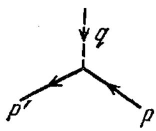
ГЛАВА IX

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ

§ 80. Рассеяние электрона во внешнем поле

Упругое рассеяние электрона в постоянном внешнем поле представляет собой простейший процесс, существующий уже в первом приближении теории возмущений (первое борновское приближение). Ему отвечает диаграмма с одной вершиной



(80,1)

где p и p' — начальный и конечный 4-импульсы электрона, а $q = p' - p$. Поскольку энергия электрона при рассеянии в постоянном поле сохраняется ($\varepsilon = \varepsilon'$), то $q = (0, \mathbf{q})$[1].

Соответствующая амплитуда рассеяния

$$M_{fi} = -e\bar{u}(p')\left[\gamma A^{(e)}(\mathbf{q})\right] u(p), \tag{80,2}$$

где $A^{(e)}(\mathbf{q})$ — компонента пространственного разложения Фурье внешнего поля. Сечение рассеяния согласно (64,26):

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2}|M_{fi}|^2 do'. \tag{80,3}$$

Для электростатического поля $A^{(e)} = \left(A_0^{(e)}, 0\right)$, так что

$$M_{fi} = -e\bar{u}(p')\gamma^0 u(p) A_0^{(e)}(\mathbf{q}) = -eu^*(p')u(p)A_0^{(e)}(\mathbf{q}). \tag{80,4}$$

В нерелятивистском случае биспинорные амплитуды плоских волн $u(p)$ сводятся к нерелятивистским (двухкомпонентным) амплитудам. Для рассеяния без изменения поляризации это — не зависящая от p величина, причем в силу принятого нами условия нормировки $u^*u = 2m$. Учитывая это, получаем

$$d\sigma = \left| -\frac{m}{2\pi} U(\mathbf{q}) \right|^2 do',$$

---

[1]) В случае внешнего поля такая диаграмма не запрещается, конечно, законом сохранения 4-импульса (как это было в диаграмме (73,19) с реальным фотоном): квадрат q^2, в отличие от квадрата 4-импульса реального фотона, не должен быть равен нулю; из интеграла Фурье, представляющего внешнее поле, автоматически выбирается компонента с нужным q.

где $U(\mathbf{q}) = eA_0^{(e)}(\mathbf{q})$ — компонента Фурье потенциальной энергии электрона в поле; это выражение совпадает с известной формулой Борна (III (126,7)).

В общем релятивистском случае сечение рассеяния неполяризованных электронов получается усреднением квадрата $|M_{fi}|^2$ по начальным и суммированием по конечным поляризациям, т. е. путем образования величины

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{поляр}} |M_{fi}|^2,$$

где суммирование производится по направлениям спина начального и конечного электронов; множитель $1/2$ превращает одно из этих суммирований в усреднение. По изложенным в § 65 правилам получим

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{поляр}} |M_{fi}|^2 = 2\,\mathrm{Sp}\,\rho'(\gamma A^{(e)})\rho(\gamma A^{(e)*}) =$$
$$= \frac{1}{2}|A_0^{(e)}(\mathbf{q})|^2\,\mathrm{Sp}\,(m+\gamma p')\gamma^0(m+\gamma p)\gamma^0.$$

Для вычисления следа замечаем, что $\gamma^{(0)}(\gamma p)\gamma^0 = \gamma\tilde{p}$, где $\tilde{p} = (\varepsilon, -\mathbf{p})$, и потому

$$\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,(m+\gamma p')\gamma^0(m+\gamma p)\gamma^0 = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,(m+\gamma p')(m+\gamma\tilde{p}) =$$
$$= m^2 + p'\tilde{p} = \varepsilon^2 + m^2 + \mathbf{p}\mathbf{p}' = 2\varepsilon^2 - \mathbf{q}^2/2.$$

Отсюда сечение

$$d\sigma = \frac{e^2|A_0^{(e)}(\mathbf{q})|^2}{4\pi^2}\varepsilon^2\left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4\varepsilon^2}\right)do'. \tag{80,5}$$

Для поля, создаваемого статическим распределением зарядов с плотностью $\rho(\mathbf{r})$, имеем

$$A_0^{(e)}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi\rho(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2}, \tag{80,6}$$

где $\rho(\mathbf{q})$ — фурье-образ распределения $\rho(\mathbf{r})$ (формфактор). В частности, для кулонова поля точечного заряда Ze имеем: $\rho(\mathbf{q}) = Ze$. Тогда сечение рассеяния

$$d\sigma = do'\,\frac{4(Ze^2)^2\varepsilon^2}{\mathbf{q}^4}\left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4\varepsilon^2}\right) \tag{80,7}$$

(*N. F. Mott*, 1929). Квадрат

$$\mathbf{q}^2 = 4\mathbf{p}^2\sin^2(\theta/2),$$

где θ — угол рассеяния. Поэтому выражение перед скобкой по своей угловой зависимости может быть названо резерфордовским сечением:

$$d\sigma_{\text{рез}} = do\,\frac{4(Ze^2)^2\varepsilon^2}{\mathbf{q}^4} = do\,\frac{(Ze^2)^2\varepsilon^2}{4\mathbf{p}^4}\sin^{-4}\frac{\theta}{2} \tag{80,8}$$

(в нерелятивистском пределе коэффициент $\varepsilon^2/\mathbf{p}^4 \to 1/m^2v^4$). Таким образом[1]),

$$d\sigma = d\sigma_{\text{рез}}\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{80,9}$$

Отметим, что в ультрарелятивистском случае угловое распределение отличается от нерелятивистского сильным подавлением рассеяния назад (при $\theta \to \pi$: $d\sigma/d\sigma_{\text{рез}} \to m^2/\varepsilon^2$).

В ультрарелятивистском случае для рассеяния на малые углы (80,7) дает

$$d\sigma = \frac{4(Ze^2)^2}{\varepsilon^2\theta^4}\,do'. \tag{80,10}$$

Хотя мы получили эту формулу в борновском приближении (т. е. предполагая $Ze^2 \ll 1$), но она остается справедливой (для углов $\theta \lesssim m/\varepsilon$) также и при $Ze^2 \sim 1$. В этом можно убедиться с помощью ультрарелятивистской точной (по Ze^2) волновой функции $\psi^{(+)}_{\varepsilon p}$ (39,10). Это решение, справедливое в области (39,2), остается, конечно, справедливым и в асимптотической области сколь угодно больших r. Здесь

$$F \infty 1 + \text{const}\cdot e^{i(pr-\mathbf{pr})}, \quad \frac{\alpha\nabla F}{\varepsilon} \sim 1 - \cos\theta \sim \theta^2 \ll 1,$$

так что поправочный член остается, как и следовало ожидать, малым. Волновая же функция вида $e^{i\mathbf{pr}}F$, совпадая по форме с нерелятивистской функцией (с очевидным изменением параметров), имеет тот же асимптотический вид, а поэтому и для сечения получается резерфордовское выражение.

Для вычисления сечения рассеяния произвольно поляризованных электронов можно было бы воспользоваться по общим правилам матрицей плотности (29,13). В данном случае, однако, можно получить результат менее громоздким способом, представив биспинорные амплитуды $u(p')$ и $u(p)$ в виде (23,9); перемножив их, получим

$$u^*(p')\,u(p) = w'^*\{\varepsilon + m + (\varepsilon - m)(\mathbf{n}'\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\}\,w,$$

---

[1]) Выражаемое этой формулой отличие $d\sigma$ от $d\sigma_{\text{рез}}$ специфично для частиц со спином $^1/_2$. Для рассеяния частиц со спином 0 (если бы их движение в электромагнитном поле описывалось волновым уравнением) получилось бы $d\sigma = d\sigma_{\text{рез}}$. На первый взгляд кажется странным, что выражающий этот чисто квантовый эффект множитель не содержит $\hbar$. Надо, однако, помнить, что условие применимости борновского приближения ($e^2/\hbar v \ll 1$) противоположно условию квазиклассичности для движения в кулоновом поле и поэтому переход к классическому случаю в формуле (80,9) невозможен.

или, воспользовавшись формулой (33,5),

$$u^*(p')\,u(p) = w'^* \hat{f} w, \tag{80,11}$$

где[1])

$$\hat{f} = A + B\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma},$$
$$A = (\varepsilon + m) + (\varepsilon - m)\cos\theta, \quad B = -i(\varepsilon - m)\sin\theta, \tag{80,12}$$
$$\mathbf{v} = \frac{[\mathbf{nn}']}{\sin\theta}.$$

Двухкомпонентная величина (3-спинор) w представляет собой нерелятивистскую спиновую волновую функцию электрона. Переход к частично поляризованным состояниям осуществляется поэтому заменой произведений $w_\alpha w_\beta^*$ (α, β — спинорные индексы) нерелятивистской двухрядной матрицей плотности $\rho_{\alpha\beta}$. Таким образом, надо заменить

$$|M_{fi}|^2 \to e^2 |A_0^{(e)}(\mathbf{q})|^2 \operatorname{Sp} \rho (A - B\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}) \rho' (A + B\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}),$$

где

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}), \quad \rho' = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}'),$$

а $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\zeta}'$ — векторы начальной и конечной поляризации, выделяемой детектором. Вычисление следа приводит к результату

$$d\sigma = d\sigma_0 \left\{ 1 + \frac{(A^2 - |B^2|)\,\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}' + 2|B|^2 (\mathbf{v}\boldsymbol{\zeta})(\mathbf{v}\boldsymbol{\zeta}') + 2A|B|\,\mathbf{v}[\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\zeta}']}{A^2 + |B|^2} \right\}, \tag{80,13}$$

где $d\sigma_0$ — сечение рассеяния неполяризованных электронов.

Представив фигурную скобку в (80,13) в виде $\{1 + \boldsymbol{\zeta}^{(f)}\boldsymbol{\zeta}'\}$, найдем поляризацию $\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$ конечного электрона как такового (в отличие от детектируемой поляризации $\boldsymbol{\zeta}'$ — см. § 65)[2]):

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \frac{(A^2 - |B|^2)\,\boldsymbol{\zeta} + 2|B|^2 (\mathbf{v}\boldsymbol{\zeta})\,\mathbf{v} + 2A|B|\,[\mathbf{v}\boldsymbol{\zeta}]}{A^2 + |B|^2}. \tag{80,14}$$

Мы видим, что рассеянные электроны поляризованы, лишь если поляризованы падающие электроны. Это обстоятельство — общее свойство первого борновского приближения (ср. III, § 140).

В нерелятивистском случае ($\varepsilon \to m$) из (80,14) получается $\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \boldsymbol{\zeta}$, т. е. электрон сохраняет при рассеянии свою поляризацию (естественное следствие пренебрежения спин-орбитальным взаимодействием).

---

[1]) Определения $\hat{f}$ здесь и в § 37, 38 различаются общим множителем.

[2]) Формула (80,14) отвечает формуле, найденной в задаче 1, III, § 140, и получается из нее при вещественном A и мнимом B.

В обратном, ультрарелятивистском, случае имеем

$$A = \varepsilon(1 + \cos\theta), \quad B = -i\varepsilon \sin\theta$$

(в соответствии с общей формулой (38,2)).

Если при этом падающий электрон имеет определенную спиральность ($\boldsymbol{\zeta} = 2\lambda\mathbf{n}$, $\lambda = \pm{}^1/_2$), то из (80,14) получается после простого приведения

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = 2\lambda\mathbf{n}'.$$

Другими словами, после рассеяния электрон остается спиральным, сохраняя прежнее значение (λ) спиральности.

Это свойство, как уже было объяснено в § 38, связано с тем, что при пренебрежении массой уравнение Дирака в спинорном представлении распадается на два независимых уравнения для функций ξ и η. Этот результат имеет и более общее значение, поскольку ток

$$\hat{j} = (\xi^*\xi + \eta^*\eta,\ \xi^*\boldsymbol{\sigma}\xi - \eta^*\boldsymbol{\sigma}\eta),$$

а с ним и оператор электромагнитного возмущения $\hat{V} = e\hat{j}\hat{A}$, не содержат смешанных по ξ и η членов, а потому не имеют матричных элементов для переходов между ξ- и η-состояниями. Отсюда следует, что если ультрарелятивистский электрон обладает определенной спиральностью (т. е. отлично от нуля либо ξ, либо η), то в процессах взаимодействия эта спиральность будет сохраняться в приближении, отвечающем полному пренебрежению массой электрона.

§ 81. Рассеяние электронов и позитронов на электроне

Рассмотрим рассеяние электрона на электроне: два электрона с 4-импульсами p_1, p_2 сталкиваются, приобретая 4-импульсы p_1', p_2'. Сохранение 4-импульса выражается равенством

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2'. \tag{81,1}$$

Ниже мы будем пользоваться введенными в § 66 кинематическими инвариантами, определенными согласно

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = 2(m^2 + p_1p_2), \\ t &= (p_1 - p_1')^2 = 2(m^2 - p_1p_1'), \\ u &= (p_1 - p_2')^2 = 2(m^2 - p_1p_2'), \\ s &+ t + u = 4m^2. \end{aligned} \tag{81,2}$$