В обратном, ультрарелятивистском, случае имеем

$$A = \varepsilon(1+\cos\theta), \quad B = -i\varepsilon\sin\theta$$

(в соответствии с общей формулой (38,2)).

Если при этом падающий электрон имеет определенную спиральность ($\zeta = 2\lambda\mathbf{n}$, $\lambda = \pm 1/2$), то из (80,14) получается после простого приведения

$$\zeta^{(f)} = 2\lambda\mathbf{n}'.$$

Другими словами, после рассеяния электрон остается спиральным, сохраняя прежнее значение (λ) спиральности.

Это свойство, как уже было объяснено в § 38, связано с тем, что при пренебрежении массой уравнение Дирака в спинорном представлении распадается на два независимых уравнения для функций ξ и η. Этот результат имеет и более общее значение, поскольку ток

$$\hat{j} = (\xi^*\xi + \eta^*\eta,\ \xi^*\sigma\xi - \eta^*\sigma\eta),$$

а с ним и оператор электромагнитного возмущения $\hat{V} = e\hat{j}\hat{A}$, не содержат смешанных по ξ и η членов, а потому не имеют матричных элементов для переходов между ξ- и η-состояниями. Отсюда следует, что если ультрарелятивистский электрон обладает определенной спиральностью (т. е. отлично от нуля либо ξ, либо η), то в процессах взаимодействия эта спиральность будет сохраняться в приближении, отвечающем полному пренебрежению массой электрона.

§ 81. Рассеяние электронов и позитронов на электроне

Рассмотрим рассеяние электрона на электроне: два электрона с 4-импульсами p_1, p_2 сталкиваются, приобретая 4-импульсы p'_1, p'_2. Сохранение 4-импульса выражается равенством

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2. \tag{81,1}$$

Ниже мы будем пользоваться введенными в § 66 кинематическими инвариантами, определенными согласно

$$\begin{aligned} s &= (p_1+p_2)^2 = 2(m^2 + p_1p_2), \\ t &= (p_1-p'_1)^2 = 2(m^2 - p_1p'_1), \\ u &= (p_1-p'_2)^2 = 2(m^2 - p_1p'_2), \\ s &+ t + u = 4m^2. \end{aligned} \tag{81,2}$$

Рассматриваемый процесс изображается двумя диаграммами Фейнмана (73,13—14), и его амплитуда[1])

$$M_{fi} = 4\pi e^2 \left\{ \frac{1}{t} (\bar{u}_2' \gamma^\mu u_2)(\bar{u}_1' \gamma_\mu u_1) - \frac{1}{u} (\bar{u}_1' \gamma^\nu u_2)(\bar{u}_2' \gamma_\nu u_1) \right\}. \quad (81,3)$$

Согласно указанным в § 65 правилам для состояний начальных и конечных частиц, описывающихся поляризационными матрицами плотности ρ_1, ρ_1', ..., заменяем

$$|M_{fi}|^2 \to 16\pi^2 e^4 \left\{ \frac{1}{t^2} \mathrm{Sp}(\rho_2' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu) \mathrm{Sp}(\rho_1' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) + \right.$$
$$+ \frac{1}{u^2} \mathrm{Sp}(\rho_1' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu) \mathrm{Sp}(\rho_2' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) -$$
$$\left. - \frac{1}{tu} \mathrm{Sp}(\rho_2' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu \rho_1' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) - \frac{1}{tu} \mathrm{Sp}(\rho_1' \gamma^\mu \rho_2 \gamma^\nu \rho_2' \gamma_\mu \rho_1 \gamma_\nu) \right\}. \quad (81,4)$$

Для рассеяния неполяризованных электронов (не интересуясь при этом их поляризацией после рассеяния) мы должны положить для всех матриц плотностей $\rho = {}^1/_2(\gamma p + m)$, умножив результат на $2 \cdot 2 = 4$ (усреднение по поляризациям двух начальных и суммирование по поляризациям двух конечных электронов). Сечение рассеяния определяется формулой (64,23), в которой надо положить согласно (64,15а) $I^2 = {}^1/_4 s(s - 4m^2)$. Представим сечение в виде

$$d\sigma = dt \frac{4\pi e^4}{s(s - 4m^2)} \{f(t, u) + g(t, u) + f(u, t) + g(u, t)\},$$

$$f(t, u) = \frac{1}{16t^2} \mathrm{Sp}\left[(\gamma p_2' + m) \gamma^\mu (\gamma p_2 + m) \gamma^\nu\right] \times$$
$$\times \mathrm{Sp}\left[(\gamma p_1' + m) \gamma_\mu (\gamma p_1 + m) \gamma_\nu\right], \quad (81,5)$$

$$g(t, u) = -\frac{1}{16tu} \mathrm{Sp}\left[(\gamma p_2' + m) \gamma^\mu (\gamma p_2 + m) \gamma^\nu (\gamma p_1' + m)(\gamma p_1 + m) \gamma_\nu\right].$$

В $f(t, u)$ сначала вычисляются следы (с помощью (22,9—10)), а затем производится суммирование по μ и ν[2]); в $g(t, u)$ сначала производится суммирование по μ и ν (с помощью формул (22,6)). В результате получим

$$f(t, u) = \frac{2}{t^2} \left[(p_1 p_2)^2 + (p_1 p_2')^2 + 2m^2(m^2 - p_1 p_1')\right],$$

$$g(t, u) = \frac{2}{tu} (p_1 p_2 - 2m^2)(p_1 p_2),$$

---

[1]) Этот вид M_{fi} находится в соответствии с общим выражением (70,5). В первом не исчезающем приближении теории возмущений из пяти инвариантных амплитуд отлична от нуля только одна: $f_3(t, u) = 4\pi e^2 t$.

[2]) Отметим для будущих ссылок формулу

$$({}^1/_4)\, \mathrm{Sp}(\gamma p_1 + m) \gamma^\mu (\gamma p_2 + m) \gamma^\nu = g^{\mu\nu}(m^2 - p_1 p_2) + p_1^\mu q_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu.$$

или, выразив функции f и g через инварианты (81,2),

$$f(t, u)=\frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2}+4m^2(t-m^2)\right],$$
$$g(t, u)=g(u, t)=\frac{2}{tu}\left(\frac{s}{2}-m^2\right)\left(\frac{s}{2}-3m^2\right). \qquad (81,6)$$

Таким образом, сечение

$$d\sigma=r_e^2\frac{4\pi m^2\,dt}{s(s-4m^2)}\left\{\frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2}+4m^2(t-m^2)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{u^2}\left[\frac{s^2+t^2}{2}+4m^2(u-m^2)\right]+\frac{4}{tu}\left(\frac{s}{2}-m^2\right)\left(\frac{s}{2}-3m^2\right)\right\}, \qquad (81,7)$$

где $r_e=e^2/m$.

Применим эту формулу в системе центра инерции. Здесь

$$s=4\varepsilon^2,\quad t=-4\mathbf{p}^2\sin^2\frac{\theta}{2},\quad u=-4\mathbf{p}^2\cos^2\frac{\theta}{2},$$
$$-dt=-2\mathbf{p}^2d\cos\theta=\frac{\mathbf{p}^2}{\pi}do \qquad (81,8)$$

($|\mathbf{p}|$, ε — величина импульса и энергия электронов, не меняющиеся при рассеянии; θ — угол рассеяния). В нерелятивистском случае ($\varepsilon\approx m$)[1]) получим

$$d\sigma=r_e^2\frac{\pi m^4\,dt}{\mathbf{p}^2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{u^2}-\frac{1}{tu}\right)=$$
$$=\left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)do=$$
$$=\left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2\frac{4(1+3\cos^2\theta)}{\sin^4\theta}do \quad \text{(н. р.)} \qquad (81,9)$$

($\mathbf{v}=2\mathbf{p}/m$ — относительная скорость электронов) в согласии с нерелятивистской теорией (см. III, § 137). В общем случае произвольных скоростей формула (81,7) после подстановки (81,8) и простых преобразований может быть приведена к виду

$$d\sigma=r_e^2\frac{m^2(\varepsilon^2+\mathbf{p}^2)^2}{4\mathbf{p}^4\varepsilon^2}\left[\frac{4}{\sin^4\theta}-\frac{3}{\sin^2\theta}+\left(\frac{\mathbf{p}^2}{\varepsilon^2+\mathbf{p}^2}\right)^2\left(1+\frac{4}{\sin^2\theta}\right)\right]do \qquad (81,10)$$

(*Ch. Möller*, 1932). В ультрарелятивистском случае ($\mathbf{p}^2\approx\varepsilon^2$)

$$d\sigma=r_e^2\frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{(3+\cos^2\theta)^2}{4\sin^4\theta}do \quad \text{(у. р.)}. \qquad (81,11)$$

---

[1]) Скорость v предполагается малой ($v\ll 1$), но такой, чтобы все еще выполнялось условие применимости теории возмущений: $e^2/v\,(=e^2/\hbar v)\ll 1$.

В лабораторной системе отсчета, в которой один из электронов (скажем, второй) до столкновения покоился, выразим сечение через величину

$$\Delta = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_1'}{m} = \frac{\varepsilon_2' - m}{m} \tag{81,12}$$

— энергию (в единицах m), переданную налетающим (первым) электроном второму[1]). Инварианты

$$\begin{aligned} s &= 2m(m + \varepsilon_1), \quad t = -2m^2\Delta, \\ u &= -2m(\varepsilon_1 - m - m\Delta). \end{aligned} \tag{81,13}$$

Подстановка этих выражений в (81,7) приводит к следующей формуле для распределения по энергиям вторичных электронов (или, как говорят, *δ-электронов*), возникающих при рассеянии быстрых первичных электронов:

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{d\Delta}{\gamma^2 - 1} \left\{ \frac{(\gamma - 1)^2 \gamma^2}{\Delta^2 (\gamma - 1 - \Delta)^2} - \frac{2\gamma^2 + 2\gamma - 1}{\Delta(\gamma - 1 - \Delta)} + 1 \right\}, \tag{81,14}$$

где $\gamma = \varepsilon_1/m$; $m\Delta$ и $m(\gamma - 1 - \Delta)$ — кинетические энергии двух электронов после столкновения; тождественность обеих частиц проявляется здесь в симметрии формулы по отношению к этим величинам. Если условиться называть электроном отдачи тот из них, который имеет меньшую энергию, то Δ будет пробегать значения от 0 до $(\gamma - 1)/2$. При малых Δ формула (81,14) принимает вид

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \frac{d\Delta}{\Delta^2} = \frac{2\pi r_e^2}{v_1^2} \frac{d\Delta}{\Delta^2}, \quad \Delta \ll \gamma - 1. \tag{81,15}$$

Отметим, что эта формула, выраженная через скорость налетающего электрона ($v_1 = |\mathbf{p}_1|/\varepsilon_1$), сохраняет свой вид при переходе к нерелятивистскому случаю. Естественно поэтому, что она по форме совпадает с результатом нерелятивистской теории (ср. III (148,17)).

Рассмотрим теперь рассеяние позитрона на электроне (*H. Bhabha*, 1936). Это — другой кросс-канал той же обобщенной реакции, к которой относится рассеяние электрона на электроне. Если p_-, p_+ — начальные, а p'_-, p'_+ — конечные импульсы электрона и позитрона, то переход от одного случая к другому осуществляется заменой

$$p_1 \to -p'_+, \quad p_2 \to p_-, \quad p'_1 \to -p_+, \quad p'_2 \to p'_-.$$

[1]) Кинематические соотношения для упругих столкновений в различных системах отсчета см. II, § 13.

При этом кинематические инварианты (81,2) приобретают следующий смысл:

$$s=(p_- - p'_+)^2,\quad t=(p_+ - p'_+)^2,\quad u=(p_- + p_+)^2. \qquad (81,16)$$

Если ee-рассеяние было s-каналом, то $\bar{e}e$-рассеяние есть u-канал реакции. Квадрат амплитуды рассеяния, выраженный через s, t, u, остается прежним, а в знаменателе формулы (81,5) надо заменить $s\to u$. Таким образом, для сечения рассеяния позитрона на электроне получим вместо (81,7)

$$d\sigma=r_e^2\frac{4\pi m^2\,dt}{u(u-4m^2)}\left\{\frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2}+4m^2(t-m^2)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{u^2}\left[\frac{s^2+t^2}{2}+4m^2(u-m^2)\right]+\frac{4}{tu}\left(\frac{s}{2}-m^2\right)\left(\frac{s}{2}-3m^2\right)\right\}. \qquad (81,17)$$

В системе центра инерции значения инвариантов s, t, u отличаются от (81,8) перестановкой s и u:

$$s=-4\mathbf{p}^2\cos^2\frac{\theta}{2},\quad t=-4\mathbf{p}^2\sin^2\frac{\theta}{2},\quad u=4\varepsilon^2. \qquad (81,18)$$

В нерелятивистском пределе формула (81,17) сводится к формуле Резерфорда

$$d\sigma=\left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2\frac{do}{\sin^4(\theta/2)}\ (\text{н. р.}), \qquad (81,19)$$

где $v=2\mathrm{p}/m$. Она получается из первого члена в фигурных скобках в (81,17), происходящего от диаграммы «рассеивательного» типа (см. § 73). Вклады же от «аннигиляционной» диаграммы (второй член в (81,17)) и от ее интерференции с рассеивательной диаграммой (третий член) в нерелятивистском пределе обращаются в нуль[1]).

В общем случае произвольных скоростей вклады всех трех членов в (81,17) — одного порядка величины (лишь в области малых углов первый член преобладает благодаря множителю $t^{-2}\propto\sin^{-4}\frac{\theta}{2}$). После приведения подобных членов можно представить сечение рассеяния позитрона на электроне (в системе

---

[1]) Переход к нерелятивистскому пределу в рассеивательном и аннигиляционном членах амплитуды рассеяния—см. ниже (83,4) и (83,20). Аннигиляционный член (83,20) содержит множитель $1/c^2$ и потому обращается в этом пределе в нуль.

центра инерции) в виде

$$d\sigma = do\frac{r_e^2}{16}\frac{m^2}{\varepsilon^2}\left\{\frac{(\varepsilon^2+\mathbf{p}^2)^2}{\mathbf{p}^4}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} - \frac{8\varepsilon^4-m^4}{\mathbf{p}^2\varepsilon^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{12\varepsilon^4+m^4}{\varepsilon^4} - \frac{4\mathbf{p}^2(\varepsilon^2+\mathbf{p}^2)}{\varepsilon^4}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{4\mathbf{p}^4}{\varepsilon^4}\sin^4\frac{\theta}{2}\right\}. \quad (81,20)$$

Симметрия по отношению к замене $\theta\to\pi-\theta$, характерная для рассеяния тождественных частиц, при рассеянии позитрона на электроне, разумеется, отсутствует. В ультрарелятивистском пределе выражение (81,20) отличается от электрон-электронного сечения лишь множителем $\cos^4(\theta/2)$:

$$d\sigma_{e\bar{e}} = \cos^4\frac{\theta}{2}\, d\sigma_{ee} \quad (\text{у. р.}). \quad (81,21)$$

В лабораторной системе отсчета, в которой одна из частиц (скажем, электрон) до столкновения покоилась, снова вводим величину

$$\Delta = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon'_+}{m} = \frac{\varepsilon'_- - m}{m}, \quad (81,22)$$

т. е. энергию, передаваемую позитроном электрону. Аналогично (81,13) имеем теперь

$$s = -2m(\varepsilon_+ - m - m\Delta), \quad t = -2m^2\Delta, \quad u = 2m(m+\varepsilon_+).$$

Подставив эти выражения в (81,17), после простых преобразований получим следующую формулу для распределения вторичных электронов по энергиям:

$$d\sigma = 2\pi r_e^2\frac{d\Delta}{\gamma^2-1}\left\{\frac{\gamma^2}{\Delta^2} - \frac{2\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma+1}\frac{1}{\Delta} + \right.$$
$$\left. + \frac{3\gamma^2+6\gamma+4}{(\gamma+1)^2} - \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2}\Delta + \frac{1}{(\gamma+1)^2}\Delta^2\right\}, \quad (81,23)$$

где $\gamma = \varepsilon_+/m$, Δ пробегает значения от 0 до $\gamma-1$. При $\Delta \ll \gamma - 1$ из (81,23) получается та же формула (81,15), что и для рассеяния электронов.

Поляризационные эффекты при рассеянии электронов или позитронов вычисляются по общим правилам, изложенным в § 65. В сколько-нибудь общих случаях вычисления приводят к громоздким формулам. Здесь мы ограничимся лишь несколькими замечаниями [1]).

В рассматриваемом (первом не исчезающем) приближении теории возмущений в сечении отсутствуют члены, линейные по

[1]) Более подробные сведения по этому вопросу можно найти в обзорной статье *McMaster W. H.*//Rev. Mod. Phys. — 1961. — Vol. 133. — P. 8.

векторам поляризации начальных или конечных частиц. Как и в нерелятивистской теории (см. III, § 140), такие члены запрещены требованиями, вытекающими из эрмитовости матрицы рассеяния. Поэтому сечение рассеяния не меняется, если поляризована лишь одна из сталкивающихся частиц, а рассеяние неполяризованных частиц не приводит к их поляризации.

Эти же требования запрещают корреляционные члены в сечении, содержащие произведения поляризаций трех из участвующих в процессе (начальных и конечных) частиц. Сечение содержит, однако, двойные и четверные корреляционные члены. При рассеянии неодинаковых частиц (электрон и позитрон, электрон и мюон) в нерелятивистском пределе эти члены обращаются в нуль, поскольку отсутствует спин-орбитальное взаимодействие. При столкновении же одинаковых частиц корреляционные члены имеются уже в нерелятивистском случае благодаря обменным эффектам.

Задачи

1. Определить сечение рассеяния поляризованных электронов в нерелятивистском случае.

Решение. В нерелятивистском случае биспинорные амплитуды в стандартном представлении становятся двухкомпонентными, а матрицы плотности — двухрядными матрицами (29,20). В амплитуде рассеяния (81,3) остаются отличными от нуля лишь члены с $\mu = \nu = 0$, содержащие диагональные (в стандартном представлении) матрицы γ^0. Вместо (81,4) будем иметь

$$\sum_{\text{поляр}} |M_{fi}|^2 = 16\pi^2 e^4 \cdot 4m^4 \left\{\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{u^2}\right) \operatorname{Sp}(1+\sigma\zeta_1)\operatorname{Sp}(1+\sigma\zeta_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{tu}\operatorname{Sp}(1+\sigma\zeta_1)(1+\sigma\zeta_2)\right\} = 16\pi^2 e^4 \cdot 4m^4 \cdot 4\left[\frac{1}{t^2}+\frac{1}{u^2}-\frac{1}{tu}(1+\zeta_1\zeta_2)\right]$$

(суммирование по поляризациям конечных электронов). Отсюда сечение рассеяния

$$d\sigma = d\sigma_0\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{1+3\cos^2\theta}\zeta_1\zeta_2\right),$$

где θ — угол рассеяния в системе центра инерции, $d\sigma_0$ — сечение для неполяризованных частиц (81,9). Для полностью поляризованных электронов эта формула совпадает с результатом задачи в III, § 137 (при этом $|\zeta_1| = |\zeta_2| = 1$, $\zeta_1\zeta_2 = \cos\alpha$, α — угол между направлениями поляризации электронов).

Для рассеяния позитронов на электронах поляризационная зависимость в том же приближении отсутствует ($d\sigma = d\sigma_0$); в этом легко убедиться, заметив, что в нерелятивистском пределе в электронных и позитронных амплитудах u_p и u_{-p} отличны от нуля различные пары компонент.

2. В нерелятивистском случае определить поляризацию рассеянных электронов при рассеянии неполяризованного пучка на поляризованной мишени.

Решение. Вычисляем сечение рассеяния при заданных начальной поляризации ζ_2 и детектируемой конечной поляризации ζ_1' (детектируется поляризация лишь одного из конечных электронов). Тем же способом, что и в задаче 1, получим

$$d\sigma = \frac{1}{2}\, d\sigma_0 \left[1 - \zeta_1'\zeta_2 \frac{2\cos\theta\,(1-\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}\right].$$

Отсюда для вектора поляризации рассеянного электрона имеем

$$\zeta_1^{(f)} = -\zeta_2 \frac{2\cos\theta\,(1-\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}.$$

3. В нерелятивистском случае определить вероятность обращения направления спина полностью поляризованного электрона при рассеянии на неполяризованном электроне.

Решение. Аналогичным образом находим сечение при заданных поляризациях ζ_1 и ζ_1':

$$d\sigma = \frac{1}{2}\, d\sigma_0 \left[1 + \zeta_1\zeta_1' \frac{2\cos\theta\,(1+\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}\right].$$

Положив $\zeta_1\zeta_1' = -1$, найдем отсюда вероятность обращения направления спина:

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{2\,(1+3\cos^2\theta)}.$$

4. Определить отношение сечений рассеяния спиральных электронов с параллельными и антипараллельными спинами в ультрарелятивистском случае.

Решение. В (81,4) надо положить согласно (29,22)

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(\gamma p_1)(1 - 2\lambda_1\gamma^5), \qquad \rho_2 = \frac{1}{2}(\gamma p_2)(1 - 2\lambda_2\gamma^5),$$

$$\rho_1' = \frac{1}{2}\gamma p_1', \qquad \rho_2' = \frac{1}{2}\gamma p_2',$$

где $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1/2$. Вычисление следов производится по приведенным в § 22 формулам; в частности,

$$\operatorname{Sp}\left[\gamma^5 (\gamma a)\gamma^\mu (\gamma b)\gamma^\nu\right] \operatorname{Sp}\left[\gamma^5 (\gamma c)\gamma_\mu (\gamma d)\gamma_\nu\right] =$$
$$= i^2 \left(e^{\rho\mu\lambda\nu} a_\rho b_\lambda\right)\left(e_{\sigma\mu\tau\nu} c^\sigma d^\tau\right) = 2\left(\delta_\sigma^\rho \delta_\tau^\lambda - \delta_\tau^\rho \delta_\sigma^\lambda\right) a_\rho b_\lambda c^\sigma d^\tau =$$
$$= 2\,(ac)(bd) - 2\,(ad)(bc).$$

В результате получим

$$\frac{d\sigma}{dt} \propto \left(\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{s^2+t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu}\right) + 4\lambda_1\lambda_2 \left(\frac{s^2-u^2}{t^2} + \frac{s^2-t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu}\right).$$

Поскольку импульсы сталкивающихся электронов (в системе центра инерции) взаимно противоположны, то одинаковым спиральностям ($\lambda_1 = \lambda_2$) отвечают антипараллельные спины, а различным спиральностям ($\lambda_1 = -\lambda_2$) — параллельные спины. Подставив s, t, u из (81,8) (причем $\mathbf{p}^2 \approx \varepsilon^2$), найдем для искомого отношения

$$\frac{d\sigma_{\uparrow\uparrow}}{d\sigma_{\uparrow\downarrow}} = \frac{1}{8}\,(1 + 6\cos^2\theta + \cos^4\theta). \tag{1}$$

Это отношение минимально ($1/8$) при $\theta = \pi/2$.

5. То же для рассеяния позитронов на электронах.

Решение. В этом случае вместо (81,4) надо вычислять

$$|M_{fi}|^2 \to 16\pi^2 e^4 \left\{\frac{1}{t^2} \operatorname{Sp}(\rho'_- \gamma^\mu \rho_- \gamma^\nu) \operatorname{Sp}(\rho_+ \gamma_\mu \rho'_+ \gamma_\nu) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{tu} \operatorname{Sp}(\rho'_- \gamma^\mu \rho_- \gamma^\nu \rho_+ \gamma_\mu \rho'_+ \gamma_\nu) + \ldots \right\}$$

(остальные члены получаются из написанных перестановкой ρ_+ и ρ'_-). Матрицы плотности:

$$\rho_- = \frac{1}{2}(\gamma p_-)(1 - 2\lambda_- \gamma^5), \qquad \rho_+ = \frac{1}{2}(\gamma p_+)(1 + 2\lambda_+ \gamma^5),$$
$$\rho'_- = \frac{1}{2}\gamma p'_-, \qquad \rho'_+ = \frac{1}{2}\gamma p'_+,$$

где λ_+, $\lambda_- = \pm 1/2$ (причем для позитрона, как и для электрона, $\lambda_+ = 1/2$ означает спин, направленный по его импульсу). Вычисление дает

$$\frac{d\sigma}{dt} \infty \left(\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu}\right) - 4\lambda_+\lambda_- \left(\frac{s^2 - u^2}{t^2} + \frac{s^2 - t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu}\right).$$

Отсюда для отношения сечений получается результат, совпадающий с формулой (1) задачи 4.

6. Определить сечение рассеяния мюонов на электронах.

Решение. Процесс описывается всего одной диаграммой (73,17). Вместо (81,5) имеем

$$d\sigma = \frac{\pi e^4\, dt}{(p_e p_\mu)^2 - m^2\mu^2} f(t, u) = \frac{4\pi e^4\, dt}{[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2]} f(t, u), \qquad (1)$$

$$f(t, u) = \frac{1}{16t^2} \operatorname{Sp}\left[(\gamma p'_\mu + \mu)\gamma^\lambda(\gamma p_\mu + \mu)\gamma^\nu\right] \operatorname{Sp}\left[(\gamma p'_e + m)\gamma_\lambda(\gamma p_e + m)\gamma_\nu\right]$$

(p_e, p_μ и p'_e, p'_μ — начальные и конечные 4-импульсы электрона и мюона; m, μ — их массы). Инварианты:

$$s = (p_e + p_\mu)^2 = m^2 + \mu^2 + 2p_e p_\mu,$$
$$t = (p_e - p'_e)^2 = 2(m^2 - p_e p'_e) = 2(\mu^2 - p_\mu p'_\mu),$$
$$u = (p_e - p'_\mu)^2 = m^2 + \mu^2 - 2p_e p'_\mu,$$
$$s + t + u = 2(m^2 + \mu^2).$$

Вычисление приводит к результату

$$f = \frac{2}{t^2}\left\{(p_e p_\mu)^2 + (p_e p'_\mu)^2 + \frac{1}{2}(m^2 + \mu^2)t\right\} =$$
$$= \frac{1}{t^2}\left\{\frac{s^2 + u^2}{2} + (m^2 + \mu^2)(2t - m^2 - \mu^2)\right\}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) решают поставленный вопрос. В системе центра инерции

$$d\sigma = \frac{e^4\, do}{8(\varepsilon_e + \varepsilon_\mu)^2 \mathbf{p}^4 \sin^4(\theta/2)} [(\varepsilon_e\varepsilon_\mu + \mathbf{p}^2)^2 + (\varepsilon_e\varepsilon_\mu + \mathbf{p}^2\cos\theta)^2 -$$
$$- 2(m^2 + \mu^2)\mathbf{p}^2 \sin^2(\theta/2)],$$

где $do = 2\pi \sin\theta\, d\theta$; ε_e, ε_μ — энергии электрона и мюона; $\mathbf{p}^2 = \varepsilon_e^2 - m^2 = \varepsilon_\mu^2 - \mu^2$. При $\mathbf{p}^2 \ll \mu^2$ мы возвращаемся к формуле (80,9) для рассеяния на неподвижном кулоновом центре. В ультрарелятивистском случае ($\mathbf{p}^2 \gg \mu^2$)

$$d\sigma = \frac{e^4}{8\mathbf{p}^2} \frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} do.$$

В лабораторной системе (в которой до столкновения покоится электрон):

$$d\sigma = 2\pi \left(\frac{e^2}{m}\right)^2 \frac{d\Delta}{\mathbf{v}_\mu^2 \Delta^2} \left(1 - \mathbf{v}_\mu^2 \frac{\Delta}{\Delta_{\max}} + \frac{m^2}{2\varepsilon_\mu^2} \Delta^2\right).$$

Здесь ε_μ — энергия, а $\mathbf{v}_\mu = \mathbf{p}_\mu/\varepsilon_\mu$ — скорость налетающего мюона; $m\Delta = \varepsilon_e' - m = \varepsilon_\mu - \varepsilon_\mu'$ — энергия электрона отдачи, а

$$\Delta_{\max} = \frac{2\mathbf{p}_\mu^2}{m^2 + \mu^2 + 2m\varepsilon_\mu}$$

— максимальное значение Δ.

7. Определить отношение сечений взаимного рассеяния спиральных электронов и мюонов с параллельными и антипараллельными спинами в ультрарелятивистском случае ($\varepsilon_\mu \gg \mu$, $\varepsilon_e \gg m$).

Решение[1]. Аналогично задаче 4 находим

$$d\sigma_{\uparrow\uparrow}/d\sigma_{\uparrow\downarrow} = \cos^4(\theta/2)$$

(θ — угол рассеяния в системе центра инерции).

8. Определить сечение превращения электронной пары в мюонную (*В. Б. Берестецкий, И. Я. Померанчук*, 1955).

Решение. Это другой кросс-канал реакции, к которой относится μe-рассеяние. В этом канале

$$s = (p_e - \bar{p}_\mu)^2, \quad t = (p_e + \bar{p}_e)^2, \quad u = (p_e - p_\mu)^2,$$

где p_e, $\bar{p}_e$ — 4-импульсы электрона и позитрона, а p_μ, $\bar{p}_\mu$ — 4-импульсы мюона и антимюона. Порог реакции отвечает энергии электронной пары, равной (в системе центра инерции) 2μ, так что должно быть $t > 4\mu^2$. В лабораторной системе, в которой до столкновения покоится электрон, а позитрон имеет энергию ε_+,

$$t = 2m(\varepsilon_+ + m) \approx 2m\varepsilon_+,$$

так что должно быть $\varepsilon_+ > \varepsilon_п$, где пороговая энергия $\varepsilon_п = 2\mu^2/m$ (здесь и ниже произведены все пренебрежения, допускаемые неравенством $\mu \gg m$).

Дифференциальное сечение (вместо (1), (2) задачи 6)

$$d\sigma = \frac{4\pi e^4\, ds}{(t - 4m^2)\, t} f(t, u) \approx 4\pi e^4 \frac{ds}{t^4} \left[\frac{s^2 + u^2}{2} + 2\mu^2 t - \mu^4\right].$$

При заданном t величина s пробегает значения между границами, определяемыми уравнениями $su \approx \mu^4$, $s + t + u \approx 2\mu^2$, т. е.

$$\mu^2 - \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{t(t - 4\mu^2)} \leqslant s \leqslant \mu^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t(t - 4\mu^2)}.$$

[1]) Другой способ решения этой задачи дан в конце § 144.

Элементарное интегрирование приводит к результату:

$$\sigma=\frac{4\pi}{3}r_e^2\frac{m^2}{t}\sqrt{1-\frac{4\mu^2}{t}}\left(1+\frac{2\mu^2}{t}\right),\qquad r_e=\frac{e^2}{m}\tag{1}$$

(в лабораторной системе $t=2m\varepsilon_+$). Эта формула неприменима в непосредственной близости к порогу: когда $\varepsilon_+-\varepsilon_п\sim\mu e^4$, образующиеся мюоны нельзя считать свободными частицами (с учетом же кулонова взаимодействия между ними сечение будет стремиться при $\varepsilon_+\to\varepsilon_п$ не к нулю, а к константе — см. III, § 147).

Сечение (1) максимально при $\varepsilon_+=1{,}7\varepsilon_п$. Его значение в максимуме примерно в 20 раз меньше сечения двухфотонной аннигиляции при той же энергии.

§ 82. Ионизационные потери быстрых частиц

Рассмотрим столкновения быстрой релятивистской частицы с атомом, сопровождающиеся возбуждением или ионизацией последнего. В нерелятивистском случае такие неупругие столкновения были рассмотрены в III, § 148—150; здесь будет дано релятивистское обобщение полученных там формул (*H. A. Bethe*, 1933).

Скорость падающей на атом частицы предполагается большой по сравнению со скоростями атомных электронов (тем самым во всяком случае предполагается, что $Z\alpha\ll1$, т. е. атомный номер не слишком велик). Этим условием обеспечивается применимость борновского приближения к рассматриваемому процессу. Решение задачи несколько различно в зависимости от того, является ли быстрая частица легкой (электрон, позитрон) или тяжелой (мезон, протон, α-частица и т. п.). Мы рассмотрим здесь последний случай, более простой.

Пусть $p=(\varepsilon,\mathbf{p})$ и $p'=(\varepsilon',\mathbf{p}')$ — начальный и конечный импульсы быстрой частицы в лабораторной системе отсчета, в которой атом до столкновения покоился; разность $q=p'-p$ дает энергию и импульс, передаваемые частицей атому. Разделим весь интервал возможных передач импульса на две области:

$$\text{I})\ \frac{\mathbf{q}^2}{m}\ll m,\qquad \text{II})\ \frac{\mathbf{q}^2}{m}\gg I,\tag{82,1}$$

где m — масса электрона, I — некоторая средняя атомная энергия (потенциал ионизации атома). Области перекрываются друг с другом при $I\ll\mathbf{q}^2/m\ll m$; это обстоятельство позволит произвести точную сшивку результатов, получающихся для каждой из областей. Будем говорить о значениях $\mathbf{q}$ в первой и во второй областях соответственно как о малых и больших передачах импульса.