Элементарное интегрирование приводит к результату:

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} r_e^2 \frac{m^2}{t} \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{t}} \left(1 + \frac{2\mu^2}{t}\right), \quad r_e = \frac{e^2}{m} \tag{1}$$

(в лабораторной системе $t = 2m\varepsilon_+$). Эта формула неприменима в непосредственной близости к порогу: когда $\varepsilon_+ - \varepsilon_п \sim \mu e^4$, образующиеся мюоны нельзя считать свободными частицами (с учетом же кулонова взаимодействия между ними сечение будет стремиться при $\varepsilon_+ \to \varepsilon_п$ не к нулю, а к константе — см. III, § 147).

Сечение (1) максимально при $\varepsilon_+ = 1{,}7\varepsilon_п$. Его значение в максимуме примерно в 20 раз меньше сечения двухфотонной аннигиляции при той же энергии.

§ 82. Ионизационные потери быстрых частиц

Рассмотрим столкновения быстрой релятивистской частицы с атомом, сопровождающиеся возбуждением или ионизацией последнего. В нерелятивистском случае такие неупругие столкновения были рассмотрены в III, § 148—150; здесь будет дано релятивистское обобщение полученных там формул (*H. A. Bethe*, 1933).

Скорость падающей на атом частицы предполагается большой по сравнению со скоростями атомных электронов (тем самым во всяком случае предполагается, что $Z\alpha \ll 1$, т. е. атомный номер не слишком велик). Этим условием обеспечивается применимость борновского приближения к рассматриваемому процессу. Решение задачи несколько различно в зависимости от того, является ли быстрая частица легкой (электрон, позитрон) или тяжелой (мезон, протон, α-частица и т. п.). Мы рассмотрим здесь последний случай, более простой.

Пусть $p = (\varepsilon, \mathbf{p})$ и $p' = (\varepsilon', \mathbf{p}')$ — начальный и конечный импульсы быстрой частицы в лабораторной системе отсчета, в которой атом до столкновения покоился; разность $q = p' - p$ дает энергию и импульс, передаваемые частицей атому. Разделим весь интервал возможных передач импульса на две области:

$$\text{I)}\ \frac{\mathbf{q}^2}{m} \ll m, \qquad \text{II)}\ \frac{\mathbf{q}^2}{m} \gg I, \tag{82,1}$$

где m — масса электрона, I — некоторая средняя атомная энергия (потенциал ионизации атома). Области перекрываются друг с другом при $I \ll \mathbf{q}^2/m \ll m$; это обстоятельство позволит произвести точную сшивку результатов, получающихся для каждой из областей. Будем говорить о значениях $\mathbf{q}$ в первой и во второй областях соответственно как о малых и больших передачах импульса.

Малые передачи импульса

В этой области атомные электроны можно считать нерелятивистскими как в начальном, так и в конечном состояниях атома.

Амплитуда процесса дается выражением

$$M_{fi}^{(n)} = e^2 J_{n0}^{\mu}(-q)\, J_{p'p}^{\nu}(q)\, D_{\mu\nu}(q), \tag{82,2}$$

где J_{n0} — 4-ток перехода атома из начального состояния (0) в конечное (n), $J_{p'p}$ — 4-ток перехода быстрой частицы; эти токи заменяют здесь собой выражения $(\bar{u}'\gamma u)$, которые стояли бы, например, в амплитуде рассеяния двух «элементарных» частиц — электрона и мюона (73,17) (ср. также (139,3)). Токи перехода берутся в импульсном представлении (см. (43,11)). Сечение процесса в лабораторной системе отсчета:

$$d\sigma_n = 2\pi\delta\left(\varepsilon - \varepsilon' - \omega_{n0}\right) \left| M_{fi}^{(n)} \right|^2 \frac{d^3p'}{2\,|\mathbf{p}|\, 2\varepsilon'\,(2\pi)^3}, \tag{82,3}$$

где $\omega_{n0} = E_n - E_0$ — частота перехода между состояниями атома. Конечное состояние может относиться как к дискретному, так и к непрерывному спектру; первый случай отвечает возбуждению, а второй — ионизации атома. В законе сохранения энергии (учитываемом δ-функцией в (82,3)) пренебрежено энергией отдачи атома, что заведомо допустимо при малых передачах импульса.

Фотонный пропагатор удобно выбрать в данном случае в калибровке (76,14), в которой отличны от нуля лишь его пространственные компоненты:

$$D_{ik}(q) = -\frac{4\pi}{\omega^2 - \mathbf{q}^2}\left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{\omega^2}\right). \tag{82,4}$$

Тогда и для 4-токов перехода в (82,2) нужны только их пространственные компоненты.

Атомный ток перехода $\mathbf{J}_{n0}(\mathbf{q})$ в данном случае есть компонента Фурье обычного нерелятивистского выражения:

$$\mathbf{J}_{n0}(\mathbf{q}) = \frac{i}{2m}\int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\left(\psi_0 \nabla \psi_n^* - \psi_n^* \nabla \psi_0\right) d^3x, \tag{82,5}$$

где ψ_0, ψ_n — атомные волновые функции (причем для упрощения записи мы опускаем здесь и ниже знак суммирования по электронам атома, т. е. пишем формулу так, как если бы в атоме был всего один электрон). Проинтегрировав в первом члене по частям, можно переписать это выражение в виде матричного элемента:

$$\mathbf{J}_{n0}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{v}e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} + e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\mathbf{v}\right)_{n0}, \tag{82,6}$$

где $\hat{\mathbf{v}} = -\frac{i}{m}\nabla$ — оператор скорости электрона.

Что касается тока перехода рассеиваемой частицы, то ввиду относительной малости теряемого ею импульса ($|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{p}|$) можно заменить его просто диагональным элементом

$$\mathbf{J}_{p'p}(0) = 2\mathbf{p}z, \tag{82,7}$$

отвечающим классическому прямолинейному движению (ср. ниже (99,5)); здесь введен также множитель z, учитывающий возможное отличие заряда частицы (ze) от заряда электрона.

Малость $\mathbf{q}$ означает также и малость угла отклонения частицы ϑ. При этом продольная и поперечная (по отношению к $\mathbf{p}$) компоненты $\mathbf{q}$ равны

$$-q_\parallel \approx \frac{dp}{d\varepsilon}\omega_{n0} = \frac{\omega_{n0}}{v}, \quad q_\perp \approx |\mathbf{p}|\,\vartheta, \tag{82,8}$$

так что $\mathbf{qp} \approx -\varepsilon\omega_{n0}$.

Подстановка (82,4—8) в (82,2) дает с учетом того, что $\omega = \omega_{n0}$:

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{4\pi z e^2}{q^2}\left\langle n \left| \frac{\varepsilon}{\omega_{n0}}(\mathbf{qv}e^{-i\mathbf{qr}} + e^{-i\mathbf{qr}}\mathbf{qv}) + (\mathbf{pv}e^{-i\mathbf{qr}} + e^{-i\mathbf{qr}}\mathbf{pv}) \right| 0 \right\rangle.$$

В первом члене замечаем, что

$$\mathbf{q}\hat{\mathbf{v}}f + f\mathbf{q}\hat{\mathbf{v}} = 2i\hat{\dot{f}},$$

где $f \equiv e^{-i\mathbf{qr}}$ (см. III, § 149); поэтому матричный элемент этого оператора совпадает с матричным элементом $2i(\dot{f})_{n0} = 2\omega_{n0}f_{n0}$. Во втором же члене достаточно заменить, ввиду малости $\mathbf{q}$, $e^{-i\mathbf{qr}}$ единицей. Тогда

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{8\pi z e^2}{q^2}\left\{\varepsilon\left(e^{-i\mathbf{qr}}\right)_{n0} - i\mathbf{pr}_{n0}\omega_{n0}\right\}.$$

Квадрат модуля этого выражения:

$$|M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{64\pi^2 (ze^2)^2}{(q^2)^2}\left\{\varepsilon^2 \left|\left(e^{-i\mathbf{qr}}\right)_{n0}\right|^2 + 2(\mathbf{qr}_{n0})(\mathbf{pr}_{n0})\varepsilon\omega_{n0} + (\mathbf{pr}_{n0})^2\omega_{n0}^2\right\} \tag{82,9}$$

(во втором члене здесь положено $e^{-i\mathbf{qr}} \approx 1 - i\mathbf{qr}$; в первом члене этого нельзя сделать по причине, которая выяснится ниже,— см. примеч. на с. 380).

Потери энергии быстрой частицей в результате ее неупругих столкновений с атомами[1]) определяются величиной

$$\varkappa = \sum_n \int \omega_{n0}\,d\sigma_n = \frac{1}{16\pi^2}\sum_n \int \omega_{n0}|M_{fi}^{(n)}|^2\,do', \tag{82,10}$$

где суммирование производится по всем возможным конечным состояниям атома, а интегрирование — по направлениям рас-

[1]) Эти потери часто называют ионизационными, хотя они связаны не только с ионизацией, но и с возбуждением атомов.

сеянной частицы; будем называть эту величину *эффективным торможением* (отношение $\varkappa/\varepsilon$ называют *сечением потери энергии*).

Интегрирование в (82,10) можно произвести в два этапа: как усреднение по азимуту направления $\mathbf{p}'$ относительно $\mathbf{p}$ и затем интегрирование по $do' \approx 2\pi\vartheta\, d\vartheta$, где ϑ — малый угол отклонения. Первая операция заменяет $\mathbf{q}\mathbf{r}_{n0}$ на

$$\mathbf{q}\mathbf{r}_{n0} \to q_{\parallel} x_{n0} = -\frac{\omega_{n0}}{v} x_{n0},$$

где x_{n0} — матричный элемент одной из декартовых координат атомных электронов[1]). Интегрирование же по ϑ можно заменить интегрированием по q^2, заметив, что

$$-q^2 = -\omega_{n0}^2 + \mathbf{q}^2 \approx -\omega_{n0}^2 + \frac{\omega_{n0}^2}{v^2} + \mathbf{p}^2\vartheta^2 = \frac{\omega_{n0}^2 M^2}{\mathbf{p}^2} + \mathbf{p}^2\vartheta^2 \qquad (82,11)$$

и потому $2\vartheta\, d\vartheta = d|q^2|/\mathbf{p}^2$ (M — масса быстрой частицы). В результате получим

$$\varkappa = 4\pi (ze^2)^2 \sum_n \int \left\{ \left| (e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}})_{n0} \right|^2 \frac{\omega_{n0}}{v^2} - \omega_{n0}^3 |x_{n0}|^2 \left(\frac{M^2}{\mathbf{p}^2} + \frac{1}{v^2} \right) \right\} \frac{d|q^2|}{|q^2|^2}. \qquad (82,12)$$

Нижний предел интегрирования по q^2:

$$|q^2|_{\min} = \frac{M^2}{\mathbf{p}^2}\omega_{n0}^2. \qquad (82,13)$$

В качестве же верхнего предела выберем некоторое значение $|q^2|_1$ такое, что

$$I \ll \frac{|q^2|_1}{m} \ll m, \qquad (82,14)$$

т. е. лежащее в области перекрытия областей I и II (82,1).

Интегрирование и суммирование в (82,12) осуществляется подобно тому, как это было сделано в III, § 149 для нерелятивистского случая. Весь интервал интегрирования разделим еще на две части: а) от $|q^2|_{\min}$ до $|q^2|_0$ и б) от $|q^2|_0$ до $|q^2|_1$, где значение $|q^2|_0$ такое, что

$$\frac{IM}{|\mathbf{p}|} \ll \sqrt{|q^2|_0} \ll m\alpha \qquad (82,15)$$

(величина $m\alpha$ справа — порядка импульсов атомных электронов). В области а) можно разложить $e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \approx 1 - i\mathbf{q}\mathbf{r}$, и вклад

[1]) Безразлично какой: после подразумевающегося ниже суммирования по направлениям момента атома в конечном состоянии матричный элемент x_{n0} уже не зависит от направления оси x.

этой области в $\varkappa$ принимает вид

$$4\pi (ze^2)^2 \sum_n \int\limits_{|q^2|_{\min}}^{|q^2|_0} \left\{ \frac{1}{v^2} \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \frac{1}{|q^2|} - \frac{M^2}{\mathbf{p}^2} \omega_{n0}^3 |x_{n0}|^2 \frac{1}{|q^2|^2} \right\} d|q^2| \approx$$

$$\approx \frac{4\pi (ze^2)^2}{v^2} \sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \left[\ln \frac{|q^2|_0 \mathbf{p}^2}{M^2 \omega_{n0}^2} - v^2 \right].$$

(Интегрирование во втором члене можно распространить до бесконечности.)

Суммирование осуществляется с помощью формулы

$$\sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 = \frac{Z}{2m}, \tag{82,16}$$

где Z — число электронов в атоме (см. III (149,10)). Результат представим в виде

$$\frac{2\pi (ze^2)^2 Z}{mv^2} \left[\ln \frac{|q^2|_0 \mathbf{p}^2}{M^2 I^2} - v^2 \right], \tag{82,17}$$

где I — некоторая средняя атомная энергия, определяемая формулой

$$\ln I = \frac{\sum\limits_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \ln \omega_{n0}}{\sum\limits_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2} = \frac{2m}{Z} \sum_n \omega_{n0} |x_{n0}|^2 \ln \omega_{n0}. \tag{82,18}$$

В области же б) имеем согласно (82,11) $|q^2| \approx \mathbf{p}^2 \vartheta^2$, т. е. $|q^2|$ не зависит от номера n конечного состояния атома; не зависят от n также и пределы интегрирования. Поэтому суммирование по n в (82,12) можно произвести под знаком интеграла. В первом члене оно осуществляется формулой

$$\sum_n |(e^{-i\mathbf{qr}})_{n0}|^2 \omega_{n0} = \frac{Z}{2m} \mathbf{q}^2 \tag{82,19}$$

(см. III (149,5)), и интеграл от него равен [1],

$$\frac{2\pi Z (ze^2)^2}{mv^2} \ln \frac{|q^2|_1}{|q^2|_0}.$$

Интеграл же от второго члена в (82,12) по этой области дает пренебрежимый вклад в $\varkappa$.

---

[1]) Логарифмическая расходимость интеграла на верхнем пределе есть как раз та причина, по которой в первом члене в (82,12) нельзя было разлагать $e^{-i\mathbf{qr}}$ по степеням $\mathbf{q}$.

Складывая последнюю формулу с (82,17), находим вклад в $\varkappa$ от всей области малых передач импульса:

$$\frac{2\pi Z (ze^2)^2}{mv^2}\left[\ln\frac{|q^2|_1 \mathbf{p}^2}{M^2 I^2} - v^2\right]. \qquad (82,20)$$

Большие передачи импульса

Обратимся к столкновениям с передачей импульса, большой по сравнению с импульсом атомных электронов ($\mathbf{q}^2 \gg mI$). В этой области можно, очевидно, пренебречь связью электронов в атоме, т. е. считать их свободными. Соответственно этому столкновение быстрой частицы с атомом будет представлять собой ее упругое рассеяние на каждом из Z атомных электронов. При этом ввиду большой скорости частицы атомные электроны можно считать первоначально покоящимися.

Обозначим посредством $m\Delta$ энергию, передаваемую быстрой частицей атомному электрону, и пусть $d\sigma_\Delta$ — сечение упругого рассеяния с такой передачей. Дифференциальное эффективное торможение на всем атоме будет тогда

$$d\varkappa = Zm\,\Delta d\sigma_\Delta. \qquad (82,21)$$

Максимальная энергия, которая может быть передана покоящемуся электрону сталкивающейся с ним частицей массы $M \gg m$, равна

$$m\Delta_{\max} = \frac{2m\mathbf{p}^2}{m^2 + M^2 + 2m\varepsilon} \approx \frac{2m\mathbf{p}^2}{M^2 + 2m\varepsilon},$$

где ε и $\mathbf{p}$ — энергия и импульс налетающей частицы (см. II (13,13)). Будем предполагать далее, что энергия ε хотя и может быть ультрарелятивистской ($\varepsilon \gg M$), но в то же время

$$\varepsilon \ll M^2/m. \qquad (82,22)$$

Тогда даже максимальная передаваемая энергия

$$m\Delta_{\max} \approx 2m\mathbf{p}^2/M^2 = 2mv^2\gamma^2, \quad \gamma = \varepsilon/M = 1/\sqrt{1-v^2} \qquad (82,23)$$

остается еще малой по сравнению с первоначальной кинетической энергией падающей частицы ($m\Delta_{\max} \ll \varepsilon - M$). Соответственно и передача импульса $\mathbf{q}$ остается всегда малой по сравнению с первоначальным импульсом частицы $\mathbf{p}$. Это обстоятельство позволяет считать движение последней неменяющимся при столкновении, т. е. рассматривать падающую частицу как бесконечно тяжелую. Тогда сечение рассеяния получится просто преобразованием сечения рассеяния электрона на неподвижном центре (80,7) к лабораторной системе отсчета, в которой электрон первоначально покоился. Это легко сделать, заметив, что в указанном приближении

$$-q^2 \approx \mathbf{q}^2 = 4\mathbf{p}^2 \sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad do' = \frac{\pi d\,|q^2|}{\mathbf{p}^2},$$

а относительная скорость v в обеих системах — одна и та же. Формула (80,7) принимает вид

$$d\sigma = \frac{4\pi (ze^2)^2}{v^2}\left(1 - \frac{|q^2|}{4m^2\gamma^2}\right)\frac{d\,|q^2|}{|q^2|^2}.$$

Передача энергии Δ выражается через тот же инвариант q^2 согласно $-q^2 = 2m^2\Delta$. Поэтому имеем [1])

$$d\sigma_\Delta = \frac{2\pi (ze^2)^2}{m^2v^2}\left(1 - v^2\frac{\Delta}{\Delta_{\max}}\right)\frac{d\Delta}{\Delta^2}. \qquad (82,24)$$

Вклад в эффективное торможение от рассматриваемой области передачи импульса получится интегрированием (82,21) в пределах от введенной выше границы $|q^2|_1$ до $|q^2|_{\max} = 2m^2\Delta_{\max}$. Он равен

$$\frac{2\pi (ze^2)^2 Z}{mv^2}\left(\ln\frac{2\Delta_{\max} m^2}{|q^2|_1} - v^2\right). \qquad (82,25)$$

Наконец, сложив вклады (82,20) и (82,25), получим окончательно следующий результат для полных ионизационных потерь быстрой тяжелой частицы:

$$\varkappa = \frac{4\pi Z (ze^2)^2}{mv^2}\left(\ln\frac{2mv^2}{I(1 - v^2/c^2)} - \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (82,26)$$

(в обычных единицах). В нерелятивистском случае отсюда получается прежняя формула III (150,10):

$$\varkappa = \frac{4\pi Z (ze^2)^2}{mv^2}\ln\frac{2mv^2}{I} \quad (\text{н. р.}), \qquad (82,27)$$

а в ультрарелятивистском случае

$$\varkappa = \frac{4\pi Z (ze^2)^2}{mc^2}\left(\ln\frac{2mc^2}{I(1 - v^2/c^2)} - 1\right) \quad (\text{у. р.}). \qquad (82,28)$$

Торможение зависит только от скорости (но не от массы) быстрой частицы. Убывание торможения при увеличении скорости согласно (82,27) сменяется в ультрарелятивистской области медленным (логарифмическим) возрастанием.

[1]) В этой формуле не учитываются, конечно, специфические эффекты сильных взаимодействий, если тяжелая частица является адроном. Эти эффекты (адронный формфактор), однако, становятся существенными лишь при $|q^2| \sim 1/M^2$, а при условии (82,22) такие передачи импульса исключены.

Задачи

1. Определить эффективное торможение релятивистского электрона.

Решение. Вклад области малых передач импульса по-прежнему дается выражением (82,20). Для области больших передач вместо (82,24) следует воспользоваться формулой (81,14), учитывающей обменные эффекты. Интегрируя $\Delta\, d\sigma_\Delta$ по $d\Delta$ от $|q^2|_1/2m^2$ до $(\gamma-1)/2$ и складывая с (82,20), находим

$$\varkappa=\frac{2\pi Ze^4}{mv^2}\left[\ln\frac{m^2(\gamma^2-1)(\gamma-1)c^4}{2I^2}-\left(\frac{2}{\gamma}-\frac{1}{\gamma^2}\right)\ln 2+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{(\gamma-1)^2}{8\gamma^2}\right], \quad (1)$$

$$\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}.$$

В нерелятивистском случае получаем формулу из задачи к III, § 149, а в ультрарелятивистском ($\gamma\gg 1$)

$$\varkappa=\frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{m^2c^4\gamma^3}{2I^2}+\frac{1}{8}\right). \quad (2)$$

2. То же для позитрона.

Решение. Для $d\sigma_\Delta$ в области больших передач следует воспользоваться (81,23), причем верхний предел по Δ равен $\gamma-1$. Ответ в ультрарелятивистском случае:

$$\varkappa=\frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{2m^2c^4\gamma^3}{I^2}-\frac{23}{12}\right).$$

§ 83. Уравнение Брейта

Как известно, в классической электродинамике система взаимодействующих частиц может быть описана с помощью функции Лагранжа, зависящей лишь от координат и скоростей самих частиц и правильной с точностью до членов $\sim 1/c^2$ (см. II, § 65). Это обстоятельство связано с тем, что излучение появляется лишь как эффект порядка $1/c^3$.

В квантовой теории этой ситуации соответствует возможность описания системы уравнением Шредингера, учитывающим члены второго порядка. Для электрона, движущегося во внешнем электромагнитном поле, такое уравнение было установлено в § 33. Теперь мы займемся выводом аналогичного уравнения, описывающего систему взаимодействующих частиц.

Будем исходить из релятивистского выражения для амплитуды рассеяния двух частиц. В нерелятивистском приближении она переходит в обычную борновскую амплитуду, пропорциональную компоненте Фурье потенциала электростатического взаимодействия двух зарядов. Вычислив же амплитуду с точностью до членов второго порядка, мы сможем установить вид соответствующего ей потенциала, учитывающего члены $\sim 1/c^2$.

Предположим сначала, что две частицы различные, с массами m_1 и m_2 (скажем, электрон и мюон). Тогда рассеяние