Задачи

1. Определить эффективное торможение релятивистского электрона.

Решение. Вклад области малых передач импульса по-прежнему дается выражением (82,20). Для области больших передач вместо (82,24) следует воспользоваться формулой (81,14), учитывающей обменные эффекты. Интегрируя $\Delta\, d\sigma_\Delta$ по $d\Delta$ от $|q^2|_1/2m^2$ до $(\gamma-1)/2$ и складывая с (82,20), находим

$$\varkappa=\frac{2\pi Ze^4}{mv^2}\left[\ln\frac{m^2(\gamma^2-1)(\gamma-1)c^4}{2I^2}-\left(\frac{2}{\gamma}-\frac{1}{\gamma^2}\right)\ln 2+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{(\gamma-1)^2}{8\gamma^2}\right], \quad (1)$$

$$\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}.$$

В нерелятивистском случае получаем формулу из задачи к III, § 149, а в ультрарелятивистском ($\gamma\gg 1$)

$$\varkappa=\frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{m^2c^4\gamma^3}{2I^2}+\frac{1}{8}\right). \quad (2)$$

2. То же для позитрона.

Решение. Для $d\sigma_\Delta$ в области больших передач следует воспользоваться (81,23), причем верхний предел по Δ равен $\gamma-1$. Ответ в ультрарелятивистском случае:

$$\varkappa=\frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{2m^2c^4\gamma^3}{I^2}-\frac{23}{12}\right).$$

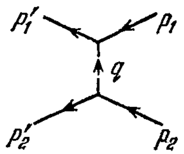
§ 83. Уравнение Брейта

Как известно, в классической электродинамике система взаимодействующих частиц может быть описана с помощью функции Лагранжа, зависящей лишь от координат и скоростей самих частиц и правильной с точностью до членов $\sim 1/c^2$ (см. II, § 65). Это обстоятельство связано с тем, что излучение появляется лишь как эффект порядка $1/c^3$.

В квантовой теории этой ситуации соответствует возможность описания системы уравнением Шредингера, учитывающим члены второго порядка. Для электрона, движущегося во внешнем электромагнитном поле, такое уравнение было установлено в § 33. Теперь мы займемся выводом аналогичного уравнения, описывающего систему взаимодействующих частиц.

Будем исходить из релятивистского выражения для амплитуды рассеяния двух частиц. В нерелятивистском приближении она переходит в обычную борновскую амплитуду, пропорциональную компоненте Фурье потенциала электростатического взаимодействия двух зарядов. Вычислив же амплитуду с точностью до членов второго порядка, мы сможем установить вид соответствующего ей потенциала, учитывающего члены $\sim 1/c^2$.

Предположим сначала, что две частицы различные, с массами m_1 и m_2 (скажем, электрон и мюон). Тогда рассеяние изображается одной диаграммой



Ей соответствует амплитуда

$$M_{fi}=e^2\left(\bar{u}_1'\gamma^\mu u_1\right)D_{\mu\nu}(q)\left(\bar{u}_2'\gamma^\nu u_2\right),\quad q=p_1'-p_1=p_2-p_2' \quad (83,1)$$

(здесь предположено, что заряды частиц одного знака; в противном случае e^2 заменяется на $-e^2$).

Дальнейшие вычисления заметно упрощаются, если фотонный пропагатор $D_{\mu\nu}$ выбрать не в обычной, а в кулоновой калибровке (76,12—13)[1]:

$$D_{00}=-\frac{4\pi}{\mathbf{q}^2},\quad D_{0i}=0,\quad D_{ik}=\frac{4\pi}{\mathbf{q}^2-\omega^2/c^2-i0}\left(\delta_{ik}-\frac{q_iq_k}{\mathbf{q}^2}\right). \quad (83,2)$$

Тогда амплитуда рассеяния

$$M_{fi}=e^2\left\{\left(\bar{u}_1'\gamma^0u_1\right)\left(\bar{u}_2'\gamma^0u_2\right)D_{00}+\left(\bar{u}_1'\gamma^iu_1\right)\left(\bar{u}_2'\gamma^ku_2\right)D_{ik}\right\}. \quad (83,3)$$

В пренебрежении всеми членами, содержащими $1/c$, второй член в фигурных скобках выпадает вовсе, а первый дает

$$M_{fi}=-2m_1\cdot 2m_2\left(w_1'^{(0)*}w_1^{(0)}\right)\left(w_2'^{(0)*}w_2^{(0)}\right)U(\mathbf{q}), \quad (83,4)$$

где

$$U(\mathbf{q})=\frac{4\pi e^2}{\mathbf{q}^2}, \quad (83,5)$$

а через $w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \ldots$ обозначены введенные в § 23 спинорные (двухкомпонентные) амплитуды нерелятивистских плоских волн. Функция $U(\mathbf{q})$ представляет собой компоненту Фурье потенциальной энергии кулонова взаимодействия: $U(r)=e^2/r$.

В следующем (по $1/c$) приближении «шредингеровская» волновая функция свободной частицы $\varphi_{шр}$ (нормированная по интегралу $\int|\varphi_{шр}|^2d^3x$) удовлетворяет уравнению

$$\hat{H}^{(0)}\varphi_{шр}=(\varepsilon-mc^2)\varphi_{шр},\quad \hat{H}^{(0)}=\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}-\frac{\hat{\mathbf{p}}^4}{8m^3c^2},\quad \hat{\mathbf{p}}=-i\nabla, \quad (83,6)$$

в котором учтен следующий член разложения релятивистского выражения для кинетической энергии. Амплитуду (спинорную) такой плоской волны обозначим w (при $1/c\to 0$ она переходит

[1]) В этом параграфе мы выписываем во всех промежуточных формулах множители c, а в окончательных формулах также и $\hbar$.

в $w^{(0)}$). Именно через эти амплитуды и должна быть выражена искомая амплитуда рассеяния для того, чтобы по ее виду можно было определить «шредингеровский» потенциал взаимодействия частиц в рассматриваемом приближении.

В соответствии с формулой (33,11) биспинорная амплитуда свободной частицы u выражается через «шредингеровскую» амплитуду w — с требуемой здесь точностью — в виде

$$u = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}\left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2}\right) w \\ \frac{\sigma\mathbf{p}}{2mc}\, w\end{pmatrix}. \tag{83,7}$$

С помощью этой формулы находим

$$\bar{u}_1'\gamma^0 u_1 = u_1'^* u_1 = 2m_1\left(1 - \frac{\mathbf{p}_1'^2 + \mathbf{p}_1^2}{8m_1^2c^2}\right) w_1'^* w_1 + \frac{1}{2m_1c^2} w_1'^* (\sigma\mathbf{p}_1')(\sigma\mathbf{p}_1) w_1 =$$
$$= 2m_1 w_1'^* \left\{1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m_1^2c^2} + \frac{i\sigma[\mathbf{q}\mathbf{p}_1]}{4m_1^2c^2}\right\} w_1,$$

$$\bar{u}_1'\boldsymbol{\gamma} u_1 = u_1'^*\boldsymbol{\alpha} u_1 = \frac{1}{c} w_1'^* \{\sigma(\sigma\mathbf{p}_1) + (\sigma\mathbf{p}_1')\sigma\} w_1 =$$
$$= \frac{1}{c} w_1'^* \{i[\sigma\mathbf{q}] + 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}\} w_1,$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2'$. Аналогичные выражения для $(\bar{u}_2'\gamma^0 u_2)$ и $(\bar{u}_2'\boldsymbol{\gamma} u_2)$ отличаются заменой индексов 1 на 2 и соответственно заменой $\mathbf{q}$ на $-\mathbf{q}$.

Подставим эти выражения в (83,3). Поскольку произведение $(\bar{u}_1'\boldsymbol{\gamma} u_1)(\bar{u}_2'\boldsymbol{\gamma} u_2)$ уже содержит множитель $1/c^2$, в D_{ik} можно пренебречь ω^2/c^2 в знаменателе. В результате получим амплитуду рассеяния в виде

$$M_{fi} = -2m_1 \cdot 2m_2 \left(w_1'^* w_2'^* U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) w_1 w_2\right), \tag{83,8}$$

где

$$U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) = 4\pi e^2 \left\{\frac{1}{\mathbf{q}^2} - \frac{1}{8m_1^2c^2} - \frac{1}{8m_2^2c^2} + \frac{(\mathbf{q}\mathbf{p}_1)(\mathbf{q}\mathbf{p}_2)}{m_1m_2c^2\mathbf{q}^4} - \frac{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}{m_1m_2c^2\mathbf{q}^2} + \right.$$
$$+ \frac{i\sigma_1[\mathbf{q}\mathbf{p}_1]}{4m_1^2c^2\mathbf{q}^2} - \frac{i\sigma_1[\mathbf{q}\mathbf{p}_2]}{2m_1m_2c^2\mathbf{q}^2} - \frac{i\sigma_2[\mathbf{q}\mathbf{p}_2]}{4m_2^2c^2\mathbf{q}^2} + \frac{i\sigma_2[\mathbf{q}\mathbf{p}_1]}{2m_1m_2c^2\mathbf{q}^2} +$$
$$\left. + \frac{(\sigma_1\mathbf{q})(\sigma_2\mathbf{q})}{4m_1m_2c^2\mathbf{q}^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{4m_1m_2c^2}\right\} \tag{83,9}$$

(индексы 1, 2 у матриц Паули указывают, на чьи спинорные индексы они действуют: σ_1 действует на w_1, а σ_2 на w_2).

Функция $U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q})$ есть оператор взаимодействия частиц в импульсном представлении. Он связан с оператором $\hat{U}(\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r})$ в координатном представлении формулой

$$\int e^{-i(\mathbf{p}_1'\mathbf{r}_1+\mathbf{p}_2'\mathbf{r}_2)}\hat{U}(\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r})\, e^{i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1+\mathbf{p}_2\mathbf{r}_2)}d^3x_1d^3x_2 =$$
$$= (2\pi)^3\delta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_2')U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}). \quad (83,10)$$

Если оператор $\hat{U}$ представляет собой просто функцию $U(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$), то $U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q})$ не зависит от $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и формула (83,10) сводится к обычному определению компоненты Фурье:

$$\int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}U(\mathbf{r})\,d^3x = U(\mathbf{q}).$$

Отсюда ясно, что для нахождения $\hat{U}(\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r})$ надо вычислить интеграл

$$\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q})\frac{d^3q}{(2\pi)^3}$$

и затем заменить $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ операторами $\hat{\mathbf{p}}_1=-i\nabla_1$, $\hat{\mathbf{p}}_2=-i\nabla_2$, расположив их правее всех других множителей.

Нужные интегралы вычисляются дифференцированием формулы

$$\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\frac{4\pi}{\mathbf{q}^2}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}=\frac{1}{r}. \quad (83,11)$$

Так, взятием градиента находим

$$\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\frac{4\pi\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}=-i\nabla\frac{1}{r}=\frac{i\mathbf{r}}{r^3}. \quad (83,12)$$

Далее ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — постоянные векторы)

$$\int\frac{4\pi(\mathbf{a}\mathbf{q})(\mathbf{b}\mathbf{q})}{\mathbf{q}^4}e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}=\frac{i}{2}\left(\mathbf{a}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\left(\mathbf{b}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\right)\frac{1}{\mathbf{q}^2}\frac{d^3q}{(2\pi)^3};$$

получившийся интеграл после интегрирования по частям сводится к (83,12) и дает

$$\int\frac{4\pi(\mathbf{a}\mathbf{q})(\mathbf{b}\mathbf{q})}{\mathbf{q}^4}e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}\nabla)\frac{\mathbf{b}\mathbf{r}}{r}=\frac{1}{2r}\left[\mathbf{a}\mathbf{b}-\frac{(\mathbf{a}\mathbf{r})(\mathbf{b}\mathbf{r})}{r^2}\right]. \quad (83,13)$$

Наконец,

$$\int\frac{4\pi(\mathbf{a}\mathbf{q})(\mathbf{b}\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2}e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}=-(\mathbf{a}\nabla)(\mathbf{b}\nabla)\frac{1}{r}.$$

При раскрытии производных надо иметь в виду, что это выражение содержит в себе δ-функцию $\delta(\mathbf{r})$. Для ее выделения замечаем, что после усреднения по направлениям $\mathbf{r}$

$$\overline{-(\mathbf{a}\nabla)(\mathbf{b}\nabla)\frac{1}{r}}=-\frac{1}{3}(\mathbf{a}\mathbf{b})\Delta\frac{1}{r}=\frac{4\pi}{3}(\mathbf{a}\mathbf{b})\delta(\mathbf{r}).$$

Раскрывая теперь производные обычным образом, находим

$$\int \frac{4\pi (\mathbf{aq})(\mathbf{bq})}{\mathbf{q}^2} e^{i\mathbf{qr}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r^3}\left\{\mathbf{ab} - 3\frac{(\mathbf{ar})(\mathbf{br})}{r^2}\right\} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{ab}\delta(\mathbf{r}) \qquad (83,14)$$

(при усреднении по направлениям $\mathbf{r}$ первый член обращается в нуль и остается лишь член с δ-функцией).

С помощью этих формул получим следующее окончательное выражение для оператора взаимодействия частиц:

$$\hat U(\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r}) =$$

$$= \frac{e^2}{r} - \frac{\pi e^2\hbar^2}{2c^2}\left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}\right)\delta(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{2m_1m_2c^2r}\left[\hat{\mathbf{p}}_1\hat{\mathbf{p}}_2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}_1)\hat{\mathbf{p}}_2}{r^2}\right] -$$

$$- \frac{e^2\hbar}{4m_1^2c^2r^3}[\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}_1]\boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{e^2\hbar}{4m_2^2c^2r^3}[\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}_2]\boldsymbol{\sigma}_2 - \frac{e^2\hbar}{2m_1m_2c^2r^3}\{[\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}_1]\boldsymbol{\sigma}_2 - [\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}_2]\boldsymbol{\sigma}_1\} +$$

$$+ \frac{e^2\hbar^2}{4m_1m_2c^2}\left\{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} - 3\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\delta(\mathbf{r})\right\}. \qquad (83,15)$$

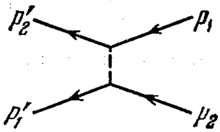
Полный гамильтониан системы двух частиц в этом приближении

$$\hat H = \hat H_1^{(0)} + \hat H_2^{(0)} + \hat U, \qquad (83,16)$$

где $\hat H^{(0)}$ — гамильтонианы свободных частиц из (83,6).

Два электрона

Если частицы тождественны (два электрона), то в амплитуде рассеяния появляется второй член, изображающийся «обменной» диаграммой



Вычислять его вклад в оператор взаимодействия, однако, нет необходимости. Дело в том, что описание системы тождественных частиц уравнением Шредингера может осуществляться с помощью такого же оператора взаимодействия, как для нетождественных частиц, если условиться о должной симметризации решений уравнения. В частности, при рассмотрении рассеяния частиц такая симметризация автоматически учтет вклады в амплитуду, соответствующие обеим фейнмановским диаграммам.

Таким образом, гамильтониан системы двух электронов получится из формул (83,15—16), если просто положить в них

$m_1 = m_2$[1]):

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}}_1^2 + \hat{\mathbf{p}}_2^2) - \frac{1}{8m^3c^2}(\hat{\mathbf{p}}_1^4 + \hat{\mathbf{p}}_2^4) + \hat{U}(\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r}),$$

$$\hat{U}(\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r}) = \frac{e^2}{r} - \pi\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2 \delta(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{2m^2c^2r}\left(\hat{\mathbf{p}}_1\hat{\mathbf{p}}_2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}_1)\hat{\mathbf{p}}_2}{r^2}\right) +$$
$$+ \frac{e^2\hbar}{4m^2c^2r^3}\{-(\sigma_1 + 2\sigma_2)[\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}_1] + (\sigma_2 + 2\sigma_1)[\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}_2]\} +$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2 \left\{\frac{\sigma_1\sigma_2}{r^3} - \frac{3(\sigma_1\mathbf{r})(\sigma_2\mathbf{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\sigma_1\sigma_2\delta(\mathbf{r})\right\}. \qquad (83,17)$$

Заметим, что присутствие членов с $\delta(\mathbf{r})$ не означает, конечно, наличия особо сильного взаимодействия. Интегральная величина всех поправочных членов одинакова, и по смыслу произведенного разложения все они должны рассматриваться как малые по сравнению с первым членом — кулоновым взаимодействием.

Различные группы членов в операторе взаимодействия (83,17) имеют различный характер. Члены первой строки в $\hat{U}$ имеют чисто орбитальное происхождение. Во второй строке стоят члены, линейные по операторам спина частиц; они отвечают спин-орбитальному взаимодействию. Наконец, квадратичные по спиновым операторам члены третьей строки описывают спин-спиновое взаимодействие[2]).

Электрон и позитрон

Система из электрона и позитрона требует особого рассмотрения. Амплитуда рассеяния в этом случае складывается из двух членов:

$$M_{fi} = -e^2[\bar{u}(p'_-)\gamma^\mu u(p_-)]D_{\mu\nu}(p_- - p'_-)[\bar{u}(-p_+)\gamma^\nu u(-p'_+)] +$$
$$+ e^2[\bar{u}(-p_+)\gamma^\mu u(p_-)]D_{\mu\nu}(p_- + p_+)[\bar{u}(p'_-)\gamma^\nu u(-p'_+)] \qquad (83,18)$$

(первый отвечает рассеивательной, а второй — аннигиляционной диаграмме). Поскольку волновая функция системы «электрон + позитрон» не должна быть антисимметричной, оба члена дают независимые вклады в оператор взаимодействия.

[1]) Волновое уравнение с гамильтонианом (83,17) было впервые установлено *Брейтом* (*G. Breit*, 1929), а его последовательный квантовомеханический вывод дан Л. Д. Ландау (1932).

[2]) Это взаимодействие упоминалось в III, § 72 в связи с тонкой структурой атомных уровней, а спин-спиновое взаимодействие электронов с ядром рассматривалось в III, § 121 в связи со сверхтонкой структурой уровней. В частности, формула III (121,9) соответствует δ-функционному члену в операторе спин-спинового взаимодействия.

Первый член (структура которого совпадает со структурой амплитуды (83,1)) приводит, естественно, к оператору, отличающемуся от (83,17) лишь общим знаком. Займемся преобразованием второго члена.

Воспользуемся здесь фотонным пропагатором в обычной калибровке:

$$D_{\mu\nu}=\frac{4\pi}{k^2}g_{\mu\nu}=\frac{4\pi}{\omega^2/c^2-\mathbf{k}^2}g_{\mu\nu}.$$

В данном случае $k=p_+ + p_-$, и поскольку частицы «почти нерелятивистские», то

$$\frac{\omega^2}{c^2}\equiv\frac{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2}{c^2}\approx 4m^2c^2\gg(\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-)^2\equiv\mathbf{k}^2. \qquad (83,19)$$

Поэтому для фотонного пропагатора достаточно написать

$$D_{\mu\nu}\approx\frac{\pi}{m^2c^2}g_{\mu\nu}.$$

Здесь уже содержится множитель $1/c^2$. Поэтому амплитуды $u(p)$ достаточно брать в нулевом приближении:

$$u(p_-)=\sqrt{2m}\begin{pmatrix}w_-^{(0)}\\0\end{pmatrix},\qquad u(-p_+)=\sqrt{2m}\begin{pmatrix}0\\w^{(0)}\end{pmatrix},$$

где $w_-^{(0)}$, $w^{(0)}$ — фигурирующие в (23,12) 3-спиноры (ниже индексы (0) у них опустим). С этими амплитудами

$$\bar u(-p_+)\gamma^0u(p_-)=u^*(-p_+)u(p_-)=0,$$
$$\bar u(-p_+)\boldsymbol{\gamma}u(p_-)=u^*(-p_+)\boldsymbol{\alpha}u(p_-)=2m(w^*\boldsymbol{\sigma}w_-).$$

После подстановки этих выражений «аннигиляционная» часть амплитуды рассеяния принимает вид

$$M_{fi}^{(\text{анн})}=-e^2\frac{\pi}{m^2c^2}(2m)^2(w^*\boldsymbol{\sigma}w_-)(w_-'^*\boldsymbol{\sigma}w'). \qquad (83,20)$$

Отсюда, однако, еще нельзя прямо сделать заключений о виде оператора взаимодействия. Во-первых, спиноры w, через которые выражаются амплитуды $u(-p_+)$, еще не являются в буквальном смысле позитронными. Позитронные амплитуды получаются из $u(-p_+)$ преобразованием зарядового сопряжения; согласно (26,6) соответствующие им спиноры (обозначим их w_+) связаны с w соотношением $w_+=\sigma_y w^*$, откуда

$$w^*=\sigma_y w_+=-w_+\sigma_y,\qquad w=-\sigma_y w_+^*. \qquad (83,21)$$

Во-вторых, амплитуда рассеяния должна быть приведена к виду, в котором сворачиваются друг с другом электронные

(w_- и w'_-) и позитронные (w_+ и w'_+) спиноры. Эта цель достигается с помощью формулы

$$\left(w^*\sigma w_-\right)\left(w'^*_-\sigma w'\right)=\frac{3}{2}\left(w'^*_-w_-\right)\left(w^*w'\right)-\frac{1}{2}\left(w'^*_-\sigma w_-\right)\left(w^*\sigma w'\right), \tag{83,22}$$

которая сама следует из (28,17).

Наконец, выразив w и w' через w_+ и w'_+ согласно (83,21), найдем, как легко проверить,

$$\left(w^*w'\right)=\left(w'^*_+w_+\right), \qquad \left(w^*\sigma w'\right)=-\left(w'^*_+\sigma w_+\right). \tag{83,23}$$

Подставив (83,23) в (83,22) и затем в (83,20), получим окончательное выражение для аннигиляционной части амплитуды рассеяния

$$M_{fi}^{(\text{анн})}=-4m^2\left\{w'^*_-w'^*_+\left[\frac{\pi e^2}{2m^2c^2}\left(3+\sigma_+\sigma_-\right)\right]w_-w_+\right\}$$

(матрицы σ_- и σ_+ действуют соответственно на w_- и w_+). Выражение в квадратных скобках представляет собой оператор взаимодействия в импульсном представлении. Соответствующий координатный оператор

$$\hat{U}^{(\text{анн})}(\mathbf{r})=\frac{\pi\hbar^2e^2}{2m^2c^2}\left(3+\sigma_+\sigma_-\right)\delta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_--\mathbf{r}_+ \tag{83,24}$$

(*Pirenne*, 1947; *В. Б. Берестецкий* и *Л. Д. Ландау*, 1949). Полный оператор взаимодействия электрона и позитрона есть

$$-\hat{U}+\hat{U}^{(\text{анн})}$$

с $\hat{U}$ из (83,17).

§ 84. Позитроний

Полученные в предыдущем параграфе формулы можно применить к позитронию — водородоподобной системе из электрона и позитрона.

В системе центра инерции операторы импульсов электрона и позитрона в позитронии: $\hat{\mathbf{p}}_-=-\hat{\mathbf{p}}_+\equiv\hat{\mathbf{p}}$, где $\hat{\mathbf{p}}=-i\hbar\nabla$ — оператор импульса относительного движения, соответствующий относительному радиус-вектору $\mathbf{r}=\mathbf{r}_--\mathbf{r}_+$. Полный гамильтониан