

( $w_-$  и  $w'_-$ ) и позитронные ( $w_+$  и  $w'_+$ ) спиноры. Эта цель достигается с помощью формулы

$$(w^* \sigma w_-) (w'^* \sigma w') = \frac{3}{2} (w'^* w_-) (w^* w') - \frac{1}{2} (w'^* \sigma w_-) (w^* \sigma w'), \quad (83,22)$$

которая сама следует из (28,17).

Наконец, выразив  $w$  и  $w'$  через  $w_+$  и  $w'_+$  согласно (83,21), найдем, как легко проверить,

$$(w^* w') = (w'^* w_+), \quad (w^* \sigma w') = - (w'^* \sigma w_+). \quad (83,23)$$

Подставив (83,23) в (83,22) и затем в (83,20), получим окончательное выражение для аннигиляционной части амплитуды рассеяния

$$M_{fi}^{(\text{анн})} = -4m^2 \left\{ w'^* w_+^* \left[ \frac{\pi e^2}{2m^2 c^2} (3 + \sigma_+ \sigma_-) \right] w_- w_+ \right\}$$

(матрицы  $\sigma_-$  и  $\sigma_+$  действуют соответственно на  $w_-$  и  $w_+$ ). Выражение в квадратных скобках представляет собой оператор взаимодействия в импульсном представлении. Соответствующий координатный оператор

$$\hat{U}^{(\text{анн})}(\mathbf{r}) = \frac{\pi \hbar^2 e^2}{2m^2 c^2} (3 + \sigma_+ \sigma_-) \delta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+ \quad (83,24)$$

(Pirenne, 1947; В. Б. Берестецкий и Л. Д. Ландау, 1949). Полный оператор взаимодействия электрона и позитрона есть

$$-\hat{U} + \hat{U}^{(\text{анн})}$$

с  $\hat{U}$  из (83,17).

## § 84. Позитроний

Полученные в предыдущем параграфе формулы можно применить к позитронию — водородоподобной системе из электрона и позитрона.

В системе центра инерции операторы импульсов электрона и позитрона в позитронии:  $\hat{\mathbf{p}}_- = -\hat{\mathbf{p}}_+ \equiv \hat{\mathbf{p}}$ , где  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$  — оператор импульса относительного движения, соответствующий относительному радиус-вектору  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+$ . Полный гамильтониан

позитрония <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{m} - \frac{e^2}{r} + \hat{V}_1 + \hat{V}_2 + \hat{V}_3, \\ \hat{V}_1 &= -\frac{\hat{\mathbf{p}}^4}{4m^3c^2} + 4\pi\mu_0^2\delta(r) - \frac{e^2}{2m^2c^2r} \left\{ \hat{\mathbf{p}}^2 + \frac{\mathbf{r}(\hat{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{p}}}{r^2} \right\}, \\ \hat{V}_2 &= 6\mu_0^2 \frac{1}{r^3} \hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{S}}, \\ \hat{V}_3 &= 6\mu_0^2 \frac{1}{r^3} \left\{ \frac{(\hat{\mathbf{S}}\mathbf{r})(\hat{\mathbf{S}}\mathbf{r})}{r^2} - \frac{1}{3} \hat{\mathbf{S}}^2 \right\} + 4\pi\mu_0^2 \left( \frac{7}{3} \hat{\mathbf{S}}^2 - 2 \right) \delta(r).\end{aligned}\quad (84,1)$$

Здесь  $\mu_0 = eh/2mc$  — магнетон Бора,  $\hat{\mathbf{h}} = [\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}]$  — оператор орбитального момента,  $\hat{\mathbf{S}} = (\sigma_+ + \sigma_-)/2$  — оператор полного спина системы (его квадрат  $\hat{\mathbf{S}}^2 = 1/2(3 + \sigma_+\sigma_-)$ ). В  $\hat{V}_1$  включены все поправочные члены чисто орбитального характера;  $\hat{V}_2$  — спин-орбитальное взаимодействие;  $\hat{V}_3$  включает в себя спин-спиновое и «аннигиляционное» взаимодействия.

Невозмущенный гамильтониан

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{m} - \frac{e^2}{r}$$

отличается, естественно, от гамильтониана атома водорода лишь заменой массы электрона приведенной массой  $m/2$ . Уровни энергии позитрония поэтому вдвое меньше (по абсолютной величине) уровней атома водорода:

$$E = -\frac{me^4}{4\hbar^2n^2} \quad (84,2)$$

( $n$  — главное квантовое число).

Остальные члены в (84,1) приводят к расщеплению уровней (84,2) — появлению тонкой структуры. Возникающие уровни классифицируются прежде всего по значениям полного момента  $j$ . Мы видим также, что операторы спинов частиц входят в гамильтониан (84,1) только в виде суммы  $\hat{\mathbf{S}}$ . Это значит, что гамильтониан коммутативен с оператором квадрата полного спина  $\hat{\mathbf{S}}^2$ , т. е. полный спин продолжает сохраняться и в рассматриваемом (втором по  $1/c$ ) приближении. Поэтому уровни энергии позитрония можно классифицировать также и по полному спину, принимающему значения  $S = 0$  и  $S = 1$ . Уровни со спином 0 называют уровнями *парапозитрония*, а уровни со спином 1 — уровнями *ортопозитрония*.

Следует подчеркнуть, что сохранение полного спина в позитронии является в действительности точным законом, не

<sup>1)</sup> В обычных единицах.

связанным с тем или иным приближением по  $1/c$ ; он следует из  $CP$ -инвариантности электромагнитных взаимодействий. Позитроний представляет собой истинно нейтральную систему, а потому его состояния характеризуются определенными зарядовой и комбинированной четностями. Последняя равна  $(-1)^{S+1}$  (см. задачу к § 27); поскольку  $S$  может иметь лишь два значения, 0 и 1, то сохранение комбинированной четности эквивалентно сохранению полного спина.

При  $S = 0$  полный момент  $j$  совпадает с орбитальным. При спине же  $S = 1$  и заданном  $j$  число  $l$  пробегает значения  $j, j \pm 1$ , соответственно чему каждый уровень  $(n, j)$  ортопозитрония расщепляется, вообще говоря, на три уровня. Поскольку значениям  $l = j$  и  $l = j \pm 1$  отвечают различные четности, гамильтониан не имеет матричных элементов, связывающих эти состояния. Однако оператор возмущения (первый член в  $V_3$ ), вообще говоря, имеет недиагональные элементы, связывающие состояния с  $l = j + 1$  и  $l = j - 1$ ; при этом число  $l$  теряет, разумеется, строгий смысл орбитального момента.

Специфическими свойствами обладает эффект Зеемана в позитронии (В. Б. Берестецкий, И. Я. Померанчук, 1949).

Орбитальный магнитный момент позитрония равен всегда нулю: поскольку в позитронии  $[\mathbf{r}_+, \mathbf{p}_+] = [\mathbf{r}_-, \mathbf{p}_-]$ , оператор

$$\hat{\mu}_l = \mu_0 ([\mathbf{r}_+, \hat{\mathbf{p}}_+] - [\mathbf{r}_-, \hat{\mathbf{p}}_-]) = 0.$$

Оператор же спинового магнитного момента

$$\hat{\mu}_s = \mu_0 (\sigma_+ - \sigma_-) \quad (84,3)$$

не пропорционален оператору полного спина  $\hat{\mathbf{S}} = 1/2 (\sigma_+ + \sigma_-)$ , а операторы  $\hat{\mathbf{S}}^2$  и  $\hat{\mu}^2$  не коммутативны. Поэтому состояния с определенными значениями полного спина  $S$  и его проекции  $S_z$  не являются, вообще говоря, собственными состояниями для магнитного момента.

Состояния с заданными  $S$  и  $S_z$  описываются спиновыми функциями  $\chi_{SS_z}$ , имеющими вид

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= \alpha_+ \alpha_-, & \chi_{1-1} &= \beta_+ \beta_-, \\ \chi_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_+ \beta_- + \alpha_- \beta_+), \\ \chi_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_+ \beta_- - \alpha_- \beta_+), \end{aligned} \quad (84,4)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — спиновые функции одной частицы, соответствующие проекциям спина  $+1/2$  и  $-1/2$  (индексы «+» или «-» указывают, что функция относится к позитрону или электрону). Из них первые две ( $\chi_{11}$  и  $\chi_{1-1}$ ) — одновременно и собственные функции опе-

ратора  $\mu_z$ , отвечающие собственному значению  $\mu_z = 0$ . Функции же  $\chi_{10}$  и  $\chi_{00}$  не являются собственными функциями  $\mu_z$ ; таковыми являются комбинации

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{10} + \chi_{00}) = \alpha_+ \beta_-, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{10} - \chi_{00}) = \alpha_- \beta_+. \quad (84,5)$$

Легко видеть, что единственными отличными от нуля элементами матрицы  $\langle S'_z S'_z | \mu_z | S S_z \rangle$ , вычисленными по функциям (84,4), являются элементы

$$\langle 00 | \mu_z | 10 \rangle = \langle 10 | \mu_z | 00 \rangle = 2\mu_0. \quad (84,6)$$

В слабых магнитных полях (когда  $\mu_0 H \ll \Delta$ , где  $\Delta$  — разность между энергиями уровней с  $S = 0$  и  $S = 1$ ) исходным приближением для вычисления зеемановского расщепления являются состояния с определенными значениями полного спина. В первом приближении это расщепление дается средним значением оператора энергии возмущения

$$\hat{V}_H = -\hat{\mu}_z H.$$

Но все диагональные матричные элементы оператора  $\hat{\mu}_z$  (а тем самым и  $\hat{V}_H$ ), вычисленные по функциям (84,4), равны нулю. Таким образом, в слабых полях линейный эффект Зеемана в позитронии отсутствует.

В противоположном предельном случае сильных полей ( $\mu_0 H \gg \Delta$ ) можно пренебречь взаимодействием спинов, приводящим к установлению определенных значений  $S$ . Компоненты расщепленного уровня будут в этом случае соответствовать состояниям с определенными значениями  $\mu_z = \pm 2\mu_0$  (описываемым функциями (84,5)), а величина их сдвига будет составлять  $\pm 2\mu_0 H$ .

### Задачи

1. Определить тонкую структуру уровней парапозитрония (В. Б. Берестецкий, 1949)<sup>1)</sup>.

Решение. Искомая энергия расщепления уровня дается средними значениями поправочных членов в гамильтониане (84,1), вычисленными по волновым функциям невозмущенных состояний с различными значениями  $j = l$  (равными 0, 1, ...,  $n-1$ ). При  $S = 0$  отличный от нуля вклад возникает только от  $\hat{V}_1$  и второго члена в  $\hat{V}_3$ .

Невозмущенные волновые функции (обозначим их  $\psi$ ) удовлетворяют уравнению Шредингера<sup>2)</sup>

$$\hat{p}^2 \psi = -\Delta \psi = \left( E + \frac{1}{r} \right) \psi, \quad E = -\frac{1}{4n^2}.$$

<sup>1)</sup> Вычисление тонкой структуры ортопозитрония см. Соколов А. А., Цытович В. Н. // ЖЭТФ. — 1953. — Т. 24. — С. 253.

<sup>2)</sup> При вычислении удобно пользоваться атомными единицами.

Поэтому

$$\begin{aligned}\hat{p}^2\psi &= \hat{p}^2 \left(E + \frac{1}{r}\right) \psi = \left(E + \frac{1}{r}\right)^2 \psi - \psi \Delta \frac{1}{r} - 2 \left(\nabla \frac{1}{r}\right) (\nabla \psi) = \\ &= \left(E + \frac{1}{r}\right)^2 \psi + 4\pi\delta(r)\psi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial r}.\end{aligned}$$

Среднее значение:

$$\bar{p}^2 = \overline{\left(E + \frac{1}{r}\right)^2} + 4\pi |\psi(0)|^2 + \int \int_0^\infty \frac{\partial |\psi|^2}{\partial r} dr d\omega.$$

Последний интеграл равен  $-\int |\psi(0)|^2 d\omega$ ; поскольку  $\psi(0) \neq 0$  только при  $l=0$ , а волновые функции  $S$ -состояний сферически-симметричны, интеграл равен  $-4\pi |\psi(0)|^2$  и сокращается со вторым членом.

Введя оператор орбитального момента  $\hat{l} = [r\hat{p}]$ , запишем:

$$-\hat{p}^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\hat{l}^2\psi}{r^2} = -\left(E + \frac{1}{r}\right)\psi.$$

Отсюда получаем для другого нужного нам среднего значения

$$\begin{aligned}\int \psi^* \frac{r}{r^3} (r\hat{p}) \hat{p}\psi d^3x &= - \int \psi^* \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} d^3x = \\ &= \frac{1}{r} \left(E + \frac{1}{r}\right) - 4\pi |\psi(0)|^2 - l(l+1) \overline{r^{-3}}\end{aligned}$$

(при  $l=0$  последний член отсутствует).

Согласно известным формулам теории атома водорода (см. III (36.14), (36.16)) — с учетом замены массы электрона  $m$  на  $m/2$  — имеем

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{8\pi n^3} \delta_{l0}.$$

$$\overline{r^{-1}} = \frac{1}{2n^2}, \quad \overline{r^{-2}} = \frac{1}{2n^3(2l+1)}, \quad \overline{r^{-3}} = \frac{1}{4n^3l(l+1)(2l+1)} \quad (l \neq 0).$$

С помощью написанных формул получим для искоемых уровней энергии парапозитрония

$$E_{nl} = -\frac{1}{4n^2} - \alpha^2 \frac{me^4}{\hbar^2} \frac{1}{2n^3} \left( \frac{1}{2l+1} - \frac{11}{32n} \right).$$

2. Определить разность энергий основных состояний ( $n=1, l=0$ ) орто- и парапозитрония.

Решение. Зависимость энергии от полного спина  $S$  при  $l=0$  содержится лишь в среднем значении второго члена в  $V_3$  (первый же член обращается в нуль при усреднении по углам в сферически-симметричном  $S$ -состоянии<sup>1)</sup>). Основной уровень ортопозитрония ( $^3S_1$ ) лежит выше основного уровня парапозитрония ( $^1S_0$ ) на величину

$$E(^3S_1) - E(^1S_0) = \frac{7}{12} \alpha^2 \frac{me^4}{\hbar^2} = 8,2 \cdot 10^{-4} \text{ эВ.}$$

<sup>1)</sup> Усреднение по углам должно производиться до интегрирования по  $r$ , как это видно из способа вычисления интеграла (83,14), приводящего к первому члену в  $V_3$ .