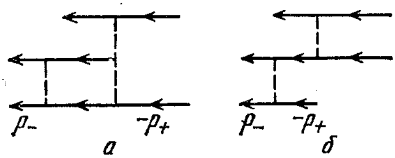
из-под знака интеграла). В результате получим

$$\sigma = \frac{28}{9}\alpha Z^2 r_e^2 \ln\frac{\omega}{m}$$

в согласии с (94,6); формула справедлива при $\ln(\omega/m) \gg 1$.

§ 100. Образование пар при столкновениях частиц

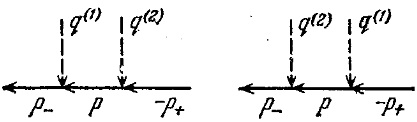
Образование электронной пары при столкновении двух заряженных частиц описывается диаграммами двух типов:



(100,1)

Две верхние сплошные линии отвечают сталкивающимся частицам, нижняя — рождающейся паре.

Рассмотрим в ультрарелятивистском случае столкновение двух тяжелых частиц (ядер). Изменением состояния движения самих этих частиц при таком столкновении можно пренебречь, т. е. можно рассматривать их как источники внешнего поля[1]. Этому отвечают две диаграммы первого типа:



(100,2)

где $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ — «импульсы» компонент Фурье полей двух частиц.

Потенциал $A^\mu = (A_0, \mathbf{A})$, создаваемый равномерно движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ классической частицей, удовлетворяет уравнениям

$$\Box A_0 = -4\pi Ze\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_0),$$

$$\Box \mathbf{A} = -4\pi Ze\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_0).$$

Его компоненты Фурье

$$A_0(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{8\pi^2 Ze}{\omega^2 - \mathbf{k}^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$$

и аналогично для $\mathbf{A}(\omega, \mathbf{k})$. В четырехмерном виде

$$A^\mu(q) = -\frac{8\pi^2 Ze}{q^2} e^{iqx_0} U^\mu \delta(Uq),$$

[1]) Случай столкновения двух легких частиц (электронов), изменением движения которых нельзя пренебречь, значительно более сложен. См. об этом указанную на с. 457 книгу *В. Н. Байера, В. М. Каткова* и *В. С. Фадина*.

где U — 4-скорость частицы, а 4-вектор $x_0 = (0, \mathbf{r}_0)$. Если ядро 1 покоится в начале координат $(\mathbf{r}_0^{(1)} = 0)$, то $\rho \equiv \mathbf{r}_0^{(2)}$ есть вектор прицельного расстояния (в плоскости, перпендикулярной направлению движения ядра 2). Это выражение для $A^\mu(q)$ и должно использоваться при аналитической записи диаграмм (100,2).

В проведении вычислений этим способом в данном случае, однако, нет необходимости. Сечение образования пары может быть определено с помощью метода эквивалентных фотонов по известному уже нам сечению образования пары фотоном на ядре. Замена поля одной из частиц (скажем, первой) спектром эквивалентных фотонов означает, что в диаграммах (100,2) линии $q^{(1)}$ рассматриваются как линии реальных фотонов. Совокупность этих двух диаграмм становится тогда тождественной с совокупностью диаграмм, отвечающих образованию пары фотоном на ядре 2. При $\varepsilon_+, \varepsilon_- \gg m$ сечение последнего процесса дается формулой (94,5). Умножив это выражение на спектр (99,16) эквивалентных фотонов первого ядра, получим (с логарифмической точностью) дифференциальное сечение образования пары при столкновении частиц:

$$d\sigma = \frac{8}{\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \frac{d\varepsilon_+ \, d\varepsilon_-}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^4} \left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right) \ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{m(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)} \ln\frac{m\gamma}{\varepsilon_+ + \varepsilon_-}, \tag{100,3}$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2} \gg 1$.

Здесь предполагается, что

$$m \ll \varepsilon_+, \ \varepsilon_- \ll m\gamma; \tag{100,4}$$

верхнее неравенство есть условие применимости метода эквивалентных фотонов. В то же время область, определяемая неравенствами (100,4), совпадает с областью энергий электрона и позитрона, существенных при интегрировании выражения (100,3). При интегрировании по ε_+ или ε_- при заданной сумме $\varepsilon \equiv \varepsilon_+ + \varepsilon_- (\gg m)$ существенна область вблизи верхнего предела; отбрасывая члены, не содержащие большого логарифма, получаем

$$d\sigma = \frac{56}{9\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \ln\frac{\varepsilon}{m} \ln\frac{m\gamma}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Интеграл по ε, взятый по области (100,4), расходится как куб логарифма, а на краях этой области — лишь как квадрат логарифма. В логарифмическом приближении $(\ln\gamma \gg 1)$, следовательно, область (100,4) действительно основная, и интеграл может быть взят в пределах от m до $m\gamma$. Имеем

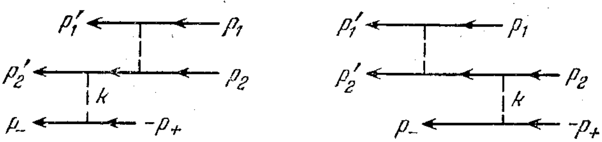
$$\int_1^\gamma \ln \xi (\ln \gamma - \ln \xi) \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{6} \ln^3 \gamma,$$

так что полное сечение образования пары

$$\sigma = \frac{28}{27\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \ln^3 \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (100,5)$$

(*Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, 1934).

Рассмотрим теперь случай нерелятивистских скоростей сталкивающихся ядер. В этом случае становится существенным изменение движения ядер под влиянием их взаимодействия, и основной вклад в сечение образования пары дают диаграммы второго типа в (100,1). Таких диаграмм — четыре: две диаграммы



(100,6)

и две аналогичные, в которых виртуальный фотон k (рождающий пару) испускается первым, а не вторым ядром [1]).

Будем считать, что энергия пары мала по сравнению с кинетической энергией относительного движения ядер в системе их центра инерции:

$$\varepsilon_+ + \varepsilon_- \ll Mv^2/2 \qquad (100,7)$$

(v — начальная относительная скорость, $M = M_1 M_2/(M_1 + M_2)$ — приведенная масса ядер). Тогда можно пренебречь обратным влиянием рождения пары на движение ядер. Если в диаграммах (100,6) убрать электрон-позитронную линию, то оставшиеся их части будут изображать испускание сталкивающимися частицами виртуального фотона малой частоты ($\omega = \varepsilon_+ + \varepsilon_-$). Мы возвращаемся, таким образом, к ситуации, рассмотренной в § 98 для испускания реального мягкого фотона, и можем воспользоваться полученной там для нерелятивистского случая формулой (98,13) (с тем отличием, что вместо амплитуды $\sqrt{4\pi}\, e^*$ реального фотона будет стоять пропагатор

[1]) Отметим, что образованию пары при столкновении двух электронов отвечает всего 36 диаграмм: $2!\cdot 3! = 12$ диаграмм типа *а*), получающихся друг из друга перестановками двух начальных и трех конечных электронов, плюс $2\cdot 2!\cdot 3! = 24$ диаграммы типа *б*), получающиеся таким же образом из двух диаграмм (100,6).

виртуального фотона [1]). Таким образом, амплитуда всего процесса рождения пары запишется в виде

$$M_{fi} = M_{fi}^{(\text{упр})} \frac{1}{\omega}\left(\frac{Z_1 e}{M_1} - \frac{Z_2 e}{M_2}\right) q^{\lambda} D_{\lambda\mu}(k)\left[-ie\left(\bar{u}_- \gamma^{\mu} u_+\right)\right], \qquad (100,8)$$

где $q = (0, \mathbf{q})$, $\mathbf{q} = M(\mathbf{v}' - \mathbf{v})$.

Как обычно, в нерелятивистском случае фотонный пропагатор следует выбрать в калибровке (76,14). По амплитуде (100,8) находим сечение процесса:

$$d\sigma = d\sigma_{\text{расс}} \cdot e^4 \left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2}\right)^2 \frac{d^3p_+\, d^3p_-}{2\varepsilon_+ 2\varepsilon_-\, (2\pi)^6 \omega^2 (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^2} (4\pi)^2 |\bar{u}_- \gamma \mathbf{Q} u_+|^2, \qquad (100,9)$$

где

$$\omega = \varepsilon_+ + \varepsilon_-, \quad \mathbf{k} = \mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{1}{\omega^2}\mathbf{k}(\mathbf{qk});$$

$d\sigma_{\text{расс}}$ — сечение упругого рассеяния ядер друг на друге (в системе их центра инерции). Оно дается формулой Резерфорда [2])

$$d\sigma_{\text{расс}} = 4\,(Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{M^2\, do}{\mathbf{q}^4} \approx 4\,(Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{dq_y\, dq_z}{v^2 \mathbf{q}^4} \qquad (100,10)$$

(приближенное равенство предполагает малость отклонения ядер от их начального направления движения — оси x). Подставив это выражение в (100,9) и произведя обычным образом суммирование по поляризациям пары, получим

$$d\sigma = (Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{e^4}{v^2}\left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2}\right)^2 \operatorname{Sp}\{(\gamma p_- + m)(\gamma \mathbf{Q})(\gamma p_+ - m)(\gamma \mathbf{Q})\} \times$$
$$\times \frac{d^3p_+\, d^3p_-\, dq_y\, dq_z}{4\pi^4 \varepsilon_+ \varepsilon_- \mathbf{q}^4 (\omega^2 - \mathbf{k}^2)^2 \omega^2}. \qquad (100,11)$$

Дальнейшее вычисление производится в приближении, в котором все возникающие при интегрировании логарифмы считаются большими величинами. Мы увидим, что с этой точностью

---

[1]) В нерелятивистском случае импульс фотона мал по сравнению с изменением импульса излучающих частиц ($|\delta\mathbf{p}| \sim \omega/v$), и потому им можно пренебречь (по сравнению с $\delta\mathbf{p}$) даже тогда, когда не пренебрегаем энергией фотона. Это тем более относится в данном случае к виртуальному фотону, для которого $k^2 = (p_+ + p_-)^2 > 0$, так что $|\mathbf{k}| < \omega$. В этих условиях разница между реальным и виртуальным фотоном исчезает, чем и оправдывается использование формулы (98,13).

[2]) Диаграммы (100,6) соответствуют борновскому приближению для рассеяния ядер. Однако поскольку формула Резерфорда точная (для кулонова взаимодействия), то справедливость полученных результатов в действительности не требует соблюдения условия применимости борновского приближения.

основную роль играют энергии пары ε_+, $\varepsilon_- \gg m$ и углы θ между $\mathbf{p}_+$ и $\mathbf{p}_-$ в области

$$m/\varepsilon \ll \theta \ll 1. \tag{100,12}$$

С соответствующими пренебрежениями вычисление следа в (100,11) дает

$$\mathrm{Sp}\{\ldots\} = 4\left[(\varepsilon_+\varepsilon_- - \mathbf{p}_+\mathbf{p}_-)\left(\mathbf{q}^2 - \frac{(\mathbf{qk})^2}{\omega^2}\right) + \right.$$
$$\left. + 2(\mathbf{p}_+\mathbf{q})(\mathbf{p}_-\mathbf{q}) + \frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{\omega^2}(\mathbf{qk})^2 - \frac{2\mathbf{qk}}{\omega}(\varepsilon_+\mathbf{qp}_-' + \varepsilon_-\mathbf{qp}_+)\right],$$

причем можно положить: $|\mathbf{p}_+| = \varepsilon_+$, $|\mathbf{p}_-| = \varepsilon_-$. В знаменателе же

$$\omega^2 - \mathbf{k}^2 \approx \varepsilon_+\varepsilon_-\theta^2 + m^2\frac{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-}.$$

Интегрируя по направлениям $\mathbf{p}_+$ и $\mathbf{p}_-$ при заданном угле между ними, получаем

$$d\sigma = \frac{8}{3\pi^2}\left(Z_1Z_2e^2\right)^2\frac{e^4}{v^2}\left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2}\right)^2\left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2\right)d\varepsilon_+\,d\varepsilon_- \times$$
$$\times \frac{\theta^3\,d\theta}{\left[\theta^2 + \frac{m^2(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2}{\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2}\right]^2}\frac{dq_y\,dq_z}{\mathbf{q}^2}. \tag{100,13}$$

Вид зависимости от θ подтверждает предположение (100,12), и интегрирование по θ дает $\ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{m(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)}$. Интегрирование же последнего множителя в (100,13) производится в пределах от $q_y = q_z = 0$ до $\sqrt{q_y^2 + q_z^2} \sim 1/R$, где R — величина порядка радиуса ядер (это значение соответствует наименьшим прицельным расстояниям — см. ниже); это интегрирование дает

$$\pi\ln\left(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2\right)\Bigg|_{q_y=q_z=0}^{q_y=q_z=1/R} \approx 2\pi\ln\frac{1}{Rq_x};$$

С другой стороны, полная энергия пары, равная изменению энергии ядер, есть

$$\varepsilon \equiv (\varepsilon_+ + \varepsilon_-) = \frac{M}{2}\left(\mathbf{v}'^2 - \mathbf{v}^2\right) \approx Mv\,(v_x' - v_x) = vq_x,$$

откуда $q_x = \varepsilon/v$. Таким образом, находим

$$d\sigma = \frac{16}{3\pi}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4m^2}{v^2}\left(\frac{Z_2}{M_2} - \frac{Z_1}{M_1}\right)^2\frac{\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2}{\varepsilon^4}\ln\frac{v}{R\varepsilon}\ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\varepsilon}d\varepsilon_+\,d\varepsilon_-,$$

а после интегрирования по ε_+ или ε_- при заданной сумме ε:

$$d\sigma=\frac{32}{9\pi}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4m^2}{v^2}\left(\frac{Z_2}{M_2}-\frac{Z_1}{M_1}\right)^2\ln\frac{v}{R\varepsilon}\ln\frac{\varepsilon}{m}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}. \qquad (100,14)$$

Энергии ε можно привести в соответствие прицельное расстояние $\rho \sim v/\varepsilon$ (энергия пары — порядка частоты, отвечающей времени столкновения). Поэтому логарифмическая расходимость при интегрировании по ε в (100,14) означает такую же расходимость по прицельным расстояниям. Это значит, что существенны большие ρ (тем самым, кстати, оправдывается использование сечения рассеяния (100,10) в чисто кулоновом поле ядра). Соответственно существенна область энергий: $m \ll \varepsilon \ll v/R$. Интегрирование (100,14) дает полное сечение образования пары; окончательно (в обычных единицах)

$$\sigma=\frac{16}{27\pi}(Z_1Z_2\alpha)^2r_e^2\left(\frac{c}{v}\right)^2\left(\frac{Z_2m}{M_2}-\frac{Z_1m}{M_1}\right)^2\ln^3\frac{\hbar v}{mc^2R} \qquad (100,15)$$

(*Е. М. Лифшиц*, 1935)[1]).

§ 101. Излучение фотона электроном в поле интенсивной электромагнитной волны

Применимость теории возмущений к процессам взаимодействия электрона с полем излучения предполагает (помимо малости константы взаимодействия α) также достаточную слабость этого поля. Если a — амплитуда классического 4-потенциала поля электромагнитной волны, то характерной величиной в этом смысле является безразмерное инвариантное отношение

$$\xi=e\sqrt{-a^2}/m. \qquad (101,1)$$

В этом параграфе мы рассмотрим процессы излучения, возникающие при взаимодействии электрона с полем сильной электромагнитной волны, для которой ξ может иметь любое значение. Применяемый метод основан на точном учете этого взаимодействия; взаимодействие же электрона с новыми испускаемыми фотонами может по-прежнему рассматриваться как малое возмущение (*А. И. Никишов, В. И. Ритус*, 1964).

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, для определенности циркулярно поляризованную. Ее 4-потенциал напишем в виде

$$A=a_1\cos\varphi+a_2\sin\varphi, \qquad \varphi=kx, \qquad (101,2)$$

[1]) Числовая ошибка исправлена *Л. Б. Окунем* (1953).