а после интегрирования по ε_+ или ε_- при заданной сумме ε:

$$d\sigma = \frac{32}{9\pi}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4m^2}{v^2}\left(\frac{Z_2}{M_2}-\frac{Z_1}{M_1}\right)^2\ln\frac{v}{R\varepsilon}\ln\frac{\varepsilon}{m}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}. \qquad (100,14)$$

Энергии ε можно привести в соответствие прицельное расстояние $\rho \sim v/\varepsilon$ (энергия пары — порядка частоты, отвечающей времени столкновения). Поэтому логарифмическая расходимость при интегрировании по ε в (100,14) означает такую же расходимость по прицельным расстояниям. Это значит, что существенны большие ρ (тем самым, кстати, оправдывается использование сечения рассеяния (100,10) в чисто кулоновом поле ядра). Соответственно существенна область энергий: $m \ll \varepsilon \ll \ll v/R$. Интегрирование (100,14) дает полное сечение образования пары; окончательно (в обычных единицах)

$$\sigma = \frac{16}{27\pi}(Z_1Z_2\alpha)^2 r_e^2\left(\frac{c}{v}\right)^2\left(\frac{Z_2m}{M_2}-\frac{Z_1m}{M_1}\right)^2\ln^3\frac{\hbar v}{mc^2R} \qquad (100,15)$$

(*Е. М. Лифшиц*, 1935)[1]).

§ 101. Излучение фотона электроном в поле интенсивной электромагнитной волны

Применимость теории возмущений к процессам взаимодействия электрона с полем излучения предполагает (помимо малости константы взаимодействия α) также достаточную слабость этого поля. Если a — амплитуда классического 4-потенциала поля электромагнитной волны, то характерной величиной в этом смысле является безразмерное инвариантное отношение

$$\xi = e\sqrt{-a^2}/m. \qquad (101,1)$$

В этом параграфе мы рассмотрим процессы излучения, возникающие при взаимодействии электрона с полем сильной электромагнитной волны, для которой ξ может иметь любое значение. Применяемый метод основан на точном учете этого взаимодействия; взаимодействие же электрона с новыми испускаемыми фотонами может по-прежнему рассматриваться как малое возмущение (*А. И. Никишов, В. И. Ритус*, 1964).

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, для определенности циркулярно поляризованную. Ее 4-потенциал напишем в виде

$$A = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi, \qquad \varphi = kx, \qquad (101,2)$$

---

[1]) Числовая ошибка исправлена *Л. Б. Окунем* (1953).

где $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ — волновой 4-вектор ($k^2 = 0$), а 4-амплитуды a_1 и a_2 одинаковы по величине и взаимно ортогональны:

$$a_1^2 = a_2^2 \equiv a^2, \qquad a_1 a_2 = 0.$$

Будем предполагать потенциал калиброванным условием Лоренца, так что $a_1 k = a_2 k = 0$.

Точная волновая функция для электрона в поле произвольной плоской электромагнитной волны была найдена в § 40 (см. формулы (40,7—8)). Изменим, однако, ее нормировку: потребуем, чтобы ψ_p отвечала равной единице средней пространственной плотности числа частиц, — подобно тому как мы нормируем волновые функции свободных частиц на одну частицу в единичном объеме. Поскольку для функции (40,7) средняя плотность равна $\bar{j}_0 = q_0/p_0$, для получения требуемой нормировки надо умножить ее на $\sqrt{p_0/q_0}$, т. е. заменить в (40,7) множитель $1/\sqrt{2p_0}$ на $1/\sqrt{2q_0}$. Для волны с 4-потенциалом (101,2) получим

$$\psi_p = \left\{1 + \frac{e}{2(kp)}\left[(\gamma k)(\gamma a_1)\cos\varphi + (\gamma k)(\gamma a_2)\sin\varphi\right]\right\}\frac{u(p)}{\sqrt{2q_0}} \times$$
$$\times \exp\left\{-ie\frac{(a_1 p)}{(kp)}\sin\varphi + ie\frac{(a_2 p)}{(kp)}\cos\varphi - iqx\right\}, \qquad (101,3)$$

где

$$q^\mu = p^\mu - e^2\frac{a^2}{2(kp)}k^\mu. \qquad (101,4)$$

Согласно (40,14) 4-вектор q — средний кинетический 4-импульс электрона; будем называть его квазиимпульсом.

Элемент S-матрицы для перехода электрона из состояния ψ_p в состояние $\psi_{p'}$ с излучением фотона с 4-импульсом $k^{\mu'} = (\omega', \mathbf{k}')$ и 4-вектором поляризации e':

$$S_{fi} = -ie\int \bar{\psi}_{p'}(\gamma e'^*)\psi_p\frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\omega'}}d^4x. \qquad (101,5)$$

Подынтегральное выражение в (101,5) представляет собой линейную комбинацию величин

$$\exp(-i\alpha_1\sin\varphi + i\alpha_2\cos\varphi)\cdot\begin{cases}1,\\ \cos\varphi,\\ \sin\varphi,\end{cases}$$

где

$$\alpha_1 = e\left(\frac{(a_1 p)}{(kp)} - \frac{(a_1 p')}{(kp')}\right), \qquad \alpha_2 = e\left(\frac{(a_2 p)}{(kp)} - \frac{(a_2 p')}{(kp')}\right). \qquad (101,6)$$

Вместе с множителем $\exp[i(k'+p'-p)x]$ эти величины выделяют всю зависимость подынтегрального выражения от x.

Разложим их в ряды Фурье, обозначив коэффициенты разложения соответственно B_s, B_{1s}, B_{2s}, например:

$$\exp(-i\alpha_1\sin\varphi+i\alpha_2\cos\varphi)=$$
$$=\exp\left(-i\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\sin(\varphi-\varphi_0)\right)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}B_s e^{-is\varphi}.$$

Эти коэффициенты выражаются через функции Бесселя согласно формулам:

$$\begin{aligned}B_s&=J_s(z)\,e^{is\varphi_0},\\ B_{1s}&=\frac{1}{2}\left[J_{s+1}(z)\,e^{i(s+1)\varphi_0}+J_{s-1}(z)\,e^{i(s-1)\varphi_0}\right],\\ B_{2s}&=\frac{1}{2i}\left[J_{s+1}(z)\,e^{i(s+1)\varphi_0}-J_{s-1}(z)\,e^{i(s-1)\varphi_0}\right],\end{aligned}\qquad(101,7)$$

где $z=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}$, $\cos\varphi_0=\alpha_1/z$, $\sin\varphi_0=\alpha_2/z$. Функции B_s, B_{1s}, B_{2s} связаны между собой соотношением

$$\alpha_1B_{1s}+\alpha_2B_{2s}=sB_s,\qquad(101,8)$$

которое является следствием известного соотношения для функций Бесселя:

$$J_{s-1}(z)+J_{s+1}(z)=2sJ_s(z)/z.$$

В результате матричный элемент (101,5) приобретает вид

$$S_{fi}=\frac{1}{(2\omega'2q_02q_0')^{1/2}}\sum_s M_{fi}^{(s)}(2\pi)^4\,i\delta^{(4)}(sk+q-q'-k');\qquad(101,9)$$

довольно громоздкие выражения для амплитуд $M_{fi}^{(s)}$ мы не станем здесь выписывать. Таким образом, S_{fi} представляет собой бесконечную сумму членов, каждому из которых соответствует закон сохранения

$$sk+q=q'+k'.\qquad(101,10)$$

Поскольку

$$q^2=q'^2=m^2(1+\xi^2)\equiv m_*^2\qquad(101,11)$$

(ср. (40,15)), а $k^2=k'^2=0$, то равенство (101,10) возможно лишь для $s\geqslant 1$. s-й член суммы описывает излучение фотона k' за счет поглощения из волны s фотонов с 4-импульсами k. Из вида равенства (101,10) очевидно, что все кинематические соотношения, имевшие место для эффекта Комптона, будут относиться к рассматриваемым процессам, если заменить импульсы электрона квазиимпульсами q, а импульс падающего фотона —

4-вектором sk. В частности, для частоты излучаемого фотона в системе отсчета, где электрон в среднем покоится ($\mathbf{q}=0$, $q_0 = m_*$), имеем

$$\omega' = \frac{s\omega}{1+(s\omega/m_*)(1-\cos\theta)}, \tag{101,12}$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ (ср. (86,8)). Можно сказать, что частоты ω' являются гармониками частоты ω.

В принятых нами обозначениях (§ 64) амплитуда процесса излучения s-й гармоники совпадает с $M_{fi}^{(s)}$, а выражение

$$dW_s = |M_{fi}^{(s)}|^2 \frac{d^3k'\, d^3q'}{(2\pi)^6\, 2\omega' 2q_0 2q_0'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(sk+q-q'-k') \tag{101,13}$$

дает соответствующую дифференциальную вероятность (отнесенную к единице времени)[1]).

Структура амплитуд $M_{fi}^{(s)}$ подобна структуре амплитуд рассеяния с плоскими волнами: $\bar{u}(p') \ldots u(p)$. Поэтому и операции суммирования по поляризациям частиц производятся обычным образом. После суммирования по поляризациям конечных электрона и фотона и усреднения по поляризациям начального электрона получается

$$dW_s = \frac{e^2m^2}{4\pi} \frac{d^3k'\, d^3q'}{q_0 q_0' \omega'} \delta^{(4)}(sk+q-q'-k') \times$$
$$\times \left\{ -2J_s^2(z) + \xi^2 \left(1+\frac{(kk')^2}{2(kp)(kp')}\right)\left(J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2\right)\right\}. \tag{101,14}$$

Для интегрирования этого выражения замечаем, что ввиду аксиальной симметрии поля циркулярно поляризованной волны дифференциальная вероятность не зависит от общего азимутального угла φ вокруг направления $\mathbf{k}$. Вместе с наличием δ-функции это обстоятельство дает возможность произвести интегрирование по всем переменным, кроме одной; в качестве последней выберем инвариантную величину $u = (kk')/(kp')$. Тогда после интегрирования по $d^3k\, d\varphi\, d(q_0' + \omega')$ имеем

$$\delta^{(4)}(sk+q-q'-k') \frac{d^3q'\, d^3k'}{q_0'\omega'} \to \frac{2\pi\, du}{(1+u)^2}.$$

Действительно, в системе центра инерции (система, в которой $s\mathbf{k}+\mathbf{q}=\mathbf{q}+\mathbf{k}'=0$) указанное интегрирование дает $2\pi|\mathbf{q}'|\,d\cos\theta/E_s$,

[1]) Обратим внимание на то, что нормировка функций ψ_p на единичную плотность отвечает нормировке на δ-функцию «по шкале $\mathbf{q}/2\pi$» (ср. (40,17), где множитель q_0/p_0 в правой стороне равенства будет теперь отсутствовать). Именно поэтому число конечных состояний электрона должно измеряться элементом $d^3q'/(2\pi)^3$.

где $E_s = s\omega + q_0 = \omega' + q_0'$, а θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{q}'$ (ср. преобразование (64,12)). С другой стороны, в этой же системе

$$u = \frac{E_s}{q_0' - |\mathbf{q}'|\cos\theta} - 1, \quad d\cos\theta = \frac{E_s\,du}{|\mathbf{q}'|(1+u)^2}.$$

Интервалу $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ соответствует интервал

$$0 \leqslant u \leqslant u_s \equiv \frac{E_s^2}{m_*^2} - 1 = \frac{2s(kp)}{m_*^2}$$

(при преобразованиях следует помнить, что $(kp) = (kq)$).

Таким образом, полная вероятность излучения в единицу времени

$$W = \sum_{s=1}^{\infty} W_s =$$

$$= \frac{e^2m^2}{4q_0}\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{u_s}\frac{du}{(1+u)^2}\left\{-4J_s^2(z) + \xi^2\left(2 + \frac{u^2}{1+u}\right)\left(J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2\right)\right\}, \tag{101,15}$$

где[1])

$$u = \frac{(kk')}{(kp')}, \quad u_s = 2s\frac{(kp)}{m_*^2}, \quad z = 2sm^2\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\sqrt{\frac{u}{u_s}\left(1 - \frac{u}{u_s}\right)}. \tag{101,16}$$

При $\xi \ll 1$ (условие применимости теории возмущений) подынтегральные выражения в (101,15) могут быть разложены по степеням ξ. Так, для первого члена разложения в W_1 получается

$$W_1 = \frac{e^2m^2}{4p_0}\xi^2\int_0^{u_1}\left[2 + \frac{u^2}{1+u} - 4\frac{u}{u_1}\left(1 - \frac{u}{u_1}\right)\right]\frac{du}{(1+u)^2} =$$

$$= \frac{e^2m^2}{4p_0}\xi^2\left[\left(1 - \frac{4}{u_1} - \frac{8}{u_1^2}\right)\ln(1+u_1) + \frac{1}{2} + \frac{8}{u_1} - \frac{1}{2(1+u_1)^2}\right], \tag{101,17}$$

[1]) Для вычисления z надо заметить предварительно, что

$$z^2 = (a_1Q)^2 + (a_2Q)^2 = a^2Q^2, \quad Q = \frac{eq}{(kq)} - \frac{eq'}{(kq')}.$$

В этом легко убедиться, выбрав систему отсчета, в которой $(a_1)_0 = (a_2)_0 = 0$, а векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{k}$ направлены по осям x^1, x^2, x^3, и заметив, что в силу $kQ = 0$ будет $Q_0 = Q_3$.

причем $u_1 \approx 2(kp)/m^2$. Как и должно быть, этот результат совпадает с формулой Клейна — Нишины для рассеяния фотона на электроне: положив в (101,17) $-a^2 = 4\pi/\omega$, $\xi^2 = 4\pi e^2/m^2\omega$ и разделив на плотность падающего потока (64,14), мы вернемся к (86,16) (интегральное сечение рассеяния не зависит от начальной поляризации фотона) [1]).

Приведем также выражение для вероятности испускания второй гармоники (первый член разложения W_2 при $\xi \ll 1$):

$$W_2 = \frac{e^2m^2\xi^4}{p_0}\int_0^{u_2}\frac{du}{(1+u)^2}\frac{u}{u_2}\left(1-\frac{u}{u_2}\right)\left[2+\frac{u^2}{1+u}-4\frac{u}{u_2}\left(1-\frac{u}{u_2}\right)\right] =$$

$$= \frac{e^2m^2\xi^4}{p_0}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3u_1}-\frac{4}{u_1^2}-\frac{2}{u_1^3}-\frac{1}{2(1+2u_1)}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2u_1}-\frac{3}{2u_1^2}-\frac{3}{u_1^3}-\frac{1}{u_1^4}\right)\ln(1+2u_1)\right]. \quad (101,18)$$

Вообще, основной член в W_s (при не слишком больших s) пропорционален ξ^{2s}.

Остановимся теперь на противоположном случае: $\xi \gg 1$. Параметр ξ можно сделать большим, например, путем уменьшения частоты ω при фиксированной напряженности поля (очевидно, что $\xi = eF/m\omega$, где F — амплитуда напряженности поля). Поэтому ясно, что случай $\xi \gg 1$ по существу сводится к процессам в постоянном однородном поле, напряженности **E** и **H** которого взаимно перпендикулярны и равны по величине (назовем условно такое поле *скрещенным*). Вероятность излучения в этом поле можно получить предельным переходом $\xi \to \infty$, но проще произвести вычисления сразу для постоянного поля, взяв 4-потенциал в виде

$$A^\mu = a^\mu\varphi, \quad \varphi = kx, \quad ak = 0 \quad (101,19)$$

(так что $F_{\mu\nu} = k_\mu a_\nu - k_\nu a_\mu = \text{const}$). Точная волновая функция электрона в этом поле получается подстановкой (101,19) в (40,7—8):

$$\psi_p = \left[1 + e\frac{(\gamma k)(\gamma a)}{2(kp)}\varphi\right]\frac{u(p)}{\sqrt{2p_0}}\exp\left\{-ie\frac{(ap)}{2(kp)}\varphi^2 + ie^2\frac{a^2}{6(kp)}\varphi^3 - ipx\right\}. \quad (101,20)$$

Получающийся с помощью этой функции результат является точным для излучения электрона в скрещенном поле при любой энергии электрона. Но в ультрарелятивистском случае этот

[1]) Указанное значение a^2 отвечает нормировке 4-потенциала на один фотон в единичном объеме. Для его определения надо приравнять ω энергии классического поля с (вещественным) 4-потенциалом (101,2).

результат (при надлежащей форме его представления — см. ниже) относится к излучению электрона не только в скрещенном, но и во всяком постоянном однородном электромагнитном поле, в том числе в постоянном магнитном поле (которое было рассмотрено в § 90).

Для формулировки этого утверждения заметим, что состояние частицы в произвольном постоянном однородном поле определяется столькими же квантовыми числами, что и состояние свободной частицы, и эти квантовые числа всегда можно выбрать так, чтобы при выключении поля они переходили в квантовые числа свободной частицы, т. е. в ее 4-импульс p^μ ($p^2=m^2$). Таким образом, состояние частицы в постоянном поле будет описываться постоянным 4-вектором p.

Полная интенсивность излучения, будучи инвариантной величиной, зависит лишь от инвариантов, которые можно составить из постоянных 4-тензора $F_{\mu\nu}$ и 4-вектора p^μ. Учитывая также, что $F_{\mu\nu}$ должен входить в интенсивность только вместе с зарядом e, получаем три безразмерных инварианта:

$$\chi^2=-\frac{e^2}{m^6}(F_{\mu\nu}p^\nu)^2=-\frac{e^2}{m^6}a^2(kp)^2,\quad f=\frac{e^2(F_{\mu\nu})^2}{m^4},\quad g=\frac{e^2}{m^4}e_{\lambda\mu\nu\rho}F^{\lambda\mu}F^{\nu\rho}. \tag{101,21}$$

В скрещенном поле $f=g\equiv 0$, в то время как в общем случае отличны от нуля все три инварианта. Но если электрон — ультрарелятивистский ($p_0\gg m$), а вектор **p** составляет с полями **E**, **H** углы $\theta\gg m/p_0$, то $\chi^2\gg f, g$ (другими словами, для ультрарелятивистской частицы почти для всех направлений **p** любое постоянное поле выглядит как скрещенное). Если, кроме того, напряженности поля $|\mathbf{E}|$, $|\mathbf{H}|\ll m^2/e$ $(=m^2c^3/e\hbar)$, то $|f|$, $|g|\ll 1$[1]). В этих условиях интенсивность, вычисленная для скрещенного поля и выраженная через инвариант χ, будет относиться также к излучению во всяком постоянном поле.

Инвариант χ выражается через напряженности **E**, **H** согласно

$$\chi^2=\frac{e^2}{m^6}\{([\mathbf{pH}]+p_0\mathbf{E})^2-(\mathbf{pE})^2\}.$$

Для постоянного магнитного поля χ совпадает с введенной в § 90 величиной (90,3), так что изложенные здесь соображения дают другой способ получения результатов § 90[2]).

[1]) При этом в выражении для χ можно с той же точностью считать p обычным кинематическим 4-импульсом частицы.

[2]) Подробное изложение теории различных процессов в сильных полях см. в обзорах *А. И. Никишова* и *В. И. Ритуса* в сб. «Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле» (Труды ФИАН. — М.: Наука, 1979. — Т. 111).