

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ
С ФОТОНАМИ**

§ 86. Рассеяние фотона электроном

Сохранение 4-импульса при рассеянии фотона свободным электроном (*эффект Комптона*) выражается равенством

$$p + k = p' + k', \quad (86,1)$$

где p и k — 4-импульсы электрона и фотона до столкновения, а p' и k' — их 4-импульсы после столкновения. Введенные в § 66 кинематические инварианты:

$$\begin{aligned} s &= (p + k)^2 = (p' + k')^2 = m^2 + 2pk = m^2 + 2p'k', \\ t &= (p - p')^2 = (k' - k)^2 = 2(m^2 - pp') = -2kk', \\ u &= (p - k')^2 = (p' - k)^2 = m^2 - 2pk' = m^2 - 2p'k, \\ s + t + u &= 2m^2. \end{aligned} \quad (86,2)$$

Рассматриваемый процесс изображается двумя диаграммами Фейнмана (74,14), и его амплитуда

$$M_{fi} = -4\pi e^2 e'_\mu e'_\nu (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u), \quad (86,3)$$

где

$$Q^{\mu\nu} = \frac{1}{s - m^2} \gamma^\mu (\gamma p + \gamma k + m) \gamma^\nu + \frac{1}{u - m^2} \gamma^\nu (\gamma p - \gamma k' + m) \gamma^\mu. \quad (86,4)$$

Здесь e, e' — 4-векторы поляризации начального и конечного фотонов; u, u' — биспинорные амплитуды начального и конечного электронов.

Согласно изложенным в § 65 правилам, для произвольных поляризационных состояний частиц квадрат $|M_{fi}|^2$ заменяется на

$$|M_{fi}|^2 \rightarrow 16\pi^2 e^4 \text{Sp} \{ \rho^{(e)'} \rho_{\lambda\mu}^{(\nu)'} Q^{\mu\nu} \rho^{(e)} \rho_{\nu\sigma}^{(\nu)} \bar{Q}^{\lambda\sigma} \}. \quad (86,5)$$

Здесь $\rho^{(e)}, \rho^{(e)'}$ — матрицы плотности начального и конечного электронов, $\rho^{(\nu)}, \rho^{(\nu)'}$ — то же для фотонов; фотонные (тензорные) индексы выписаны явно, а электронные (биспинорные) подразумеваются; знак Sp относится именно к последним индексам. К этим же индексам относится знак эрмитова сопряжения в определении $\bar{Q}_{\mu\nu} = \gamma^0 Q_{\mu\nu}^+ \gamma^0$.

Рассмотрим рассеяние неполяризованного фотона на неполяризованном электроне, не интересуясь при этом их поляризациями после рассеяния. Усреднение по поляризациям всех частиц достигается с помощью матриц плотности:

$$\rho_{\lambda\mu}^{(\nu)} = \rho_{\lambda\mu}^{(\nu')} = -\frac{1}{2} g_{\lambda\mu}, \quad \rho^{(e)} = \frac{1}{2} (\gamma p + m), \quad \rho^{(e')} = \frac{1}{2} (\gamma p' + m);$$

переход к суммированию по поляризациям конечных частиц осуществляется умножением еще на $2 \cdot 2 = 4$.

По формуле (64,23) (в которой надо положить теперь $I^2 = = \frac{1}{4} (s - m^2)^2$ — см. (64,15a)) получим для сечения

$$d\sigma = \frac{\pi e^4}{4} \frac{dt}{(s - m^2)^2} \text{Sp} \{ (\gamma p' + m) Q^{\lambda\mu} (\gamma p + m) \bar{Q}_{\lambda\mu} \}.$$

С помощью формул (65,2a) находим, что $\bar{Q}_{\mu\lambda} = Q_{\lambda\mu}$. Отделив члены, переходящие друг в друга при замене $k \leftrightarrow -k'$ (и соответственно $s \leftrightarrow u$), представим сечение в виде

$$d\sigma = dt \frac{\pi e^4}{(s - m^2)^2} [f(s, u) + g(s, u) + f(u, s) + g(u, s)],$$

где обозначено

$$f(s, u) = \frac{1}{4(s - m^2)^2} \times$$

$$\times \text{Sp} \{ (\gamma p' + m) \gamma^\mu (\gamma p + \gamma k + m) \gamma^\nu (\gamma p + m) \gamma_\nu (\gamma p + \gamma k + m) \gamma_\mu \}$$

$$g(s, u) = \frac{1}{4(s - m^2)(u - m^2)} \times$$

$$\times \text{Sp} \{ (\gamma p' + m) \gamma^\mu (\gamma p + \gamma k + m) \gamma^\nu (\gamma p + m) \gamma_\mu (\gamma p - \gamma k' + m) \gamma_\nu \}$$

(в этих обозначениях мы заранее имеем в виду, что результат будет зависеть лишь от инвариантных величин).

Суммирование по μ и ν выполняется с помощью формул (22,6); отбросив затем члены с нечетным числом множителей γ , получим

$$f(s, u) = \frac{1}{(s - m^2)^2} \text{Sp} \{ (\gamma p') (\gamma p + \gamma k) (\gamma p) (\gamma p + \gamma k) + \\ + 4m^2 (\gamma p + \gamma k) (\gamma k - \gamma p') + m^2 (\gamma p) (\gamma p') + 4m^4 \}.$$

Вычислив след с помощью формул (22,13) и выразив все величины через инварианты s, u , найдем после простых преобразований

$$f(s, u) = \frac{2}{(s - m^2)^2} \{ 4m^4 - (s - m^2)(u - m^2) + 2m^2(s - m^2) \}.$$

Аналогичным образом вычисляется g :

$$g(s, u) = \frac{2m^2}{(s - m^2)(u - m^2)} \{4m^2 + (s - m^2) + (u - m^2)\}.$$

В результате для сечения получим

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 \frac{m^2 dt}{(s - m^2)^2} \left\{ \left(\frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right)^2 + \left(\frac{m^2}{s - m^2} + \frac{m^2}{u - m^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{s - m^2}{u - m^2} + \frac{u - m^2}{s - m^2} \right) \right\}, \quad (86,6)$$

где $r_e = e^2/m$. Эта формула выражает сечение через инвариантные величины. С ее помощью легко выразить сечение через параметры столкновения в любой конкретной системе отсчета.

Сделаем это для лабораторной системы отсчета, в которой электрон до столкновения покоился: $p = (m, 0)$. Здесь

$$s - m^2 = 2m\omega, \quad u - m^2 = -2m\omega'. \quad (86,7)$$

Написав уравнение сохранения 4-импульса в виде $p + k - k' = p'$ и возведя его в квадрат, получим

$$pk - pk' - kk' = 0,$$

откуда (в лабораторной системе)

$$m(\omega - \omega') - \omega\omega'(1 - \cos\vartheta) = 0,$$

где ϑ — угол рассеяния фотона. Этим равенством определяется связь между изменением энергии фотона и углом рассеяния:

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos\vartheta). \quad (86,8)$$

Инвариант t :

$$t = -2kk' = -2\omega\omega'(1 - \cos\vartheta).$$

При заданной энергии ω находим (с помощью (86,8))

$$dt = 2\omega'^2 d \cos\vartheta = \frac{1}{\pi} \omega'^2 d\omega', \quad d\omega' = 2\pi \sin\vartheta d\vartheta.$$

Подстановка написанных выражений в (86,6) приводит к следующей формуле для сечения рассеяния в лабораторной системе отсчета:

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\vartheta \right) d\omega' \quad (86,9)$$

(O. Klein, Y. Nishina, 1929; И. Е. Тамм, 1930).

Поскольку угол ϑ однозначно связан с ω' соотношением (86,8), сечение может быть выражено через энергию рассеянного

фотона ω' :

$$d\sigma = \pi r_e^2 \frac{m d\omega'}{\omega^2} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} + \left(\frac{m}{\omega'} - \frac{m}{\omega} \right)^2 - 2m \left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) \right], \quad (86,10)$$

причем ω' меняется в пределах

$$\frac{\omega}{1 + 2\omega/m} \leq \omega' \leq \omega. \quad (86,11)$$

При $\omega \ll m$ в (86,9) можно положить $\omega' \approx \omega$, и получается, как и должно быть, классическая нерелятивистская формула Томсона

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \theta) d\omega' \quad (86,12)$$

(см. II (78,7)).

Для вычисления полного сечения вернемся к формуле (86,6). Входящие в нее инварианты s , t , u пробегают значения, удовлетворяющие неравенствам

$$s \geq m^2, \quad t \leq 0, \quad us \leq m^4. \quad (86,13)$$

Они были уже получены в § 67 (соответствующая им физическая область — I на рис. 7, с. 300). Легко убедиться в них и непосредственно, написав выражения инвариантов в системе центра инерции. Здесь $\mathbf{p} + \mathbf{k} = 0$, а энергии электрона ε и фотона ω связаны посредством $\varepsilon = \sqrt{\omega^2 + m^2}$. Инварианты:

$$\begin{aligned} s &= (\varepsilon + \omega)^2 = m^2 + 2\omega(\varepsilon + \omega), \\ u &= m^2 - 2\omega(\varepsilon + \omega \cos \theta), \\ t &= -2\omega^2(1 - \cos \theta), \end{aligned} \quad (86,14)$$

где θ — угол рассеяния (угол между \mathbf{p} и \mathbf{p}' или между \mathbf{k} и \mathbf{k}'). Три неравенства (86,13) получаются из условий: $\omega \geq 0$, $-1 \leq \cos \theta \leq 1$.

При заданном s (заданной энергии частиц) интегрирование по t можно заменить интегрированием по $u = 2m^2 - s - t$ в интервале

$$m^4/s \geq u \geq 2m^2 - s.$$

Введя вместо s , u величины

$$x = \frac{s - m^2}{m^2}, \quad y = \frac{m^2 - u}{m^2}, \quad (86,15)$$

получим

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{x^2} \int_{x/(x+1)}^x \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right] dy$$

и после элементарного интегрирования

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x} \left\{ \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} \right) \ln(1+x) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(1+x)^2} \right\}. \quad (86,16)$$

Первые члены разложения при $x \ll 1$ (нерелятивистский случай) дают

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{3} (1-x) \quad (\text{н. р.}). \quad (86,17)$$

Первый член есть классическое томсоновское сечение. В обратном,

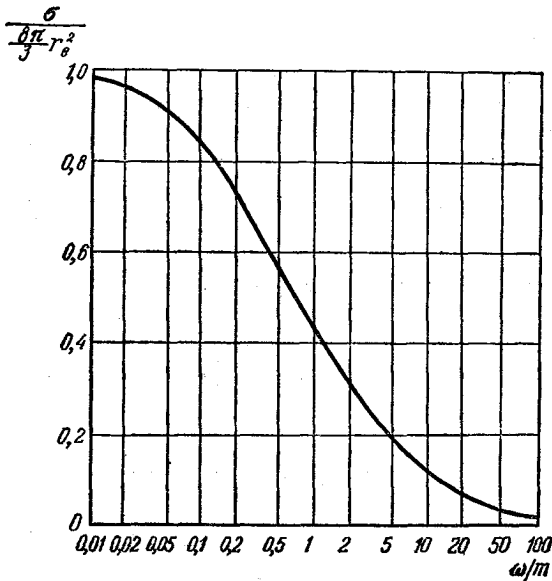


Рис. 13

ультрарелятивистском случае $x \gg 1$, и разложение формулы (86,16) дает

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x} \left(\ln x + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{у. р.}). \quad (86,18)$$

В лабораторной системе отсчета

$$x = 2\omega/m, \quad (86,19)$$

так что формулы (86,16—18) прямо дают зависимость сечения рассеяния на неподвижном электроны от энергии фотона. На рис. 13 дан график зависимости σ от ω/m .

Отметим, что в ультрарелятивистском случае сечение падает с увеличением энергии как в лабораторной системе отсчета

($\sigma \propto \omega^{-1} \ln \omega$), так и в системе центра инерции ($x \approx 4\omega^2/m^2$, $\sigma \propto \omega^{-2} \ln \omega$). Угловое же распределение в ультрарелятивистском случае носит в этих двух системах отсчета совершенно разный характер.

В лабораторной системе дифференциальное сечение имеет резкий максимум в направлении вперед. В узком конусе $\theta \leq \sqrt{m/\omega}$ имеем $\omega' \sim \omega$ и сечение $d\sigma/d\omega' \sim r_e^2$ (достигая значения r_e^2 при $\theta \rightarrow 0$). Вне этого конуса сечение убывает, и в области $\theta^2 \gg m/\omega$ (где $\omega' \approx m/(1 - \cos \theta)$) имеем

$$\frac{d\sigma}{d\omega'} = \frac{r_e^2}{2} \frac{m}{\omega(1 - \cos \theta)},$$

т. е. сечение уменьшается в $\sim \omega/m$ раз.

В системе же центра инерции дифференциальное сечение имеет максимум в направлении назад. При $\pi - \theta \ll 1$ имеем из (86,14)

$$\frac{s - m^2}{m^2} \approx \frac{4\omega^2}{m^2}, \quad \frac{m^2 - u}{m^2} \approx 1 + \frac{\omega^2}{m^2} (\pi - \theta)^2.$$

Наибольший член в сечении (86,6)

$$d\sigma \approx 8\pi r_e^2 \frac{m^2 dt}{4(s - m^2)(m^2 - u)},$$

откуда

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{2} \frac{d\omega'}{1 + (\pi - \theta)^2 \omega^2/m^2}. \quad (86,20)$$

Сечение $d\sigma/d\omega' \sim r_e^2$ в узком конусе $\pi - \theta \leq m/\omega$, а вне его уменьшается по порядку величины в ω^2/m^2 раз.

§ 87. Рассеяние фотона электроном. Поляризационные эффекты

Вернемся к исходным формулам предыдущего параграфа и покажем, каким образом должны производиться вычисления с учетом поляризации начальных и конечных фотонов и электронов.

Матрица плотности фотона выражается согласно (8,17) с помощью пары единичных 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, удовлетворяющих условиям (8,16). В данном случае можно выбрать эти векторы единым образом для обоих фотонов. Это — введенные в