($\sigma \propto \omega^{-1} \ln \omega$), так и в системе центра инерции ($x \approx 4\omega^2/m^2$, $\sigma \propto \omega^{-2} \ln \omega$). Угловое же распределение в ультрарелятивистском случае носит в этих двух системах отсчета совершенно различный характер.

В лабораторной системе дифференциальное сечение имеет резкий максимум в направлении вперед. В узком конусе $\vartheta \lesssim \sqrt{m/\omega}$ имеем $\omega' \sim \omega$ и сечение $d\sigma/do' \sim r_e^2$ (достигая значения r_e^2 при $\vartheta \to 0$). Вне этого конуса сечение убывает, и в области $\vartheta^2 \gg m/\omega$ (где $\omega' \approx m/(1-\cos\vartheta)$) имеем

$$\frac{d\sigma}{do'} = \frac{r_e^2}{2} \frac{m}{\omega(1-\cos\vartheta)},$$

т. е. сечение уменьшается в $\sim \omega/m$ раз.

В системе же центра инерции дифференциальное сечение имеет максимум в направлении назад. При $\pi - \theta \ll 1$ имеем из (86,14)

$$\frac{s-m^2}{m^2} \approx \frac{4\omega^2}{m^2}, \quad \frac{m^2-u}{m^2} \approx 1 + \frac{\omega^2}{m^2}(\pi-\theta)^2.$$

Наибольший член в сечении (86,6)

$$d\sigma \approx 8\pi r_e^2 \frac{m^4\, dt}{4(s-m^2)(m^2-u)},$$

откуда

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{2} \frac{do'}{1+(\pi-\theta)^2 \omega^2/m^2}. \tag{86,20}$$

Сечение $d\sigma/do' \sim r_e^2$ в узком конусе $\pi - \theta \lesssim m/\omega$, а вне его уменьшается по порядку величины в ω^2/m^2 раз.

§ 87. Рассеяние фотона электроном. Поляризационные эффекты

Вернемся к исходным формулам предыдущего параграфа и покажем, каким образом должны производиться вычисления с учетом поляризации начальных и конечных фотонов и электронов.

Матрица плотности фотона выражается согласно (8,17) с помощью пары единичных 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, удовлетворяющих условиям (8,16). В данном случае можно выбрать эти векторы единым образом для обоих фотонов. Это — введенные в

§ 70 4-векторы[1])

$$e^{(1)} = \frac{N}{\sqrt{-N^2}}, \quad e^{(2)} = \frac{P}{\sqrt{-P^2}}, \tag{87,1}$$

где

$$\begin{gathered} P^\lambda = (p^\lambda + p'^\lambda) - K^\lambda \frac{pK + p'K}{K^2}, \quad N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu q_\nu K_\rho, \\ K^\lambda = k^\lambda + k'^\lambda, \quad q^\lambda = k'^\lambda - k^\lambda = p^\lambda - p'^\lambda. \end{gathered} \tag{87,2}$$

Величины $Q^{\mu\nu}$ в (86,5) даются формулой (86,4). Их можно рассматривать как компоненты 4-тензора (в том смысле, что они образуют 4-тензор после образования величин $\bar{u}' Q^{\mu\nu} u$, как говорят, «в обкладках»). Все компоненты 4-тензора можно исчерпать, проецируя его на четыре взаимно ортогональных 4-вектора, например на определенные выше P, N, q, K. Поскольку тензоры $\rho^{(\gamma)'}_{\mu\nu}$, $\rho^{(\gamma)}_{\mu\nu}$ содержат только компоненты по P и N, фактически нам нужны будут компоненты $Q_{\mu\nu}$ тоже лишь по этим 4-векторам. Другими словами, достаточно искать в $Q_{\mu\nu}$ лишь члены вида

$$\begin{gathered} Q_{\mu\nu} = Q_0 \left(e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu + e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu\right) + Q_1 \left(e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu + e^{(2)}_\mu e^{(1)}_\nu\right) - iQ_2 \left(e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(1)}_\nu\right) + \\ + Q_3 \left(e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu\right); \end{gathered} \tag{87,3}$$

остальные члены при подстановке в (86,5) все равно выпали бы. Величины Q_0 и Q_3 являются скалярами — в том же смысле, как и $Q_{\mu\nu}$ есть 4-тензор; они содержат поэтому матрицы γ лишь в «инвариантных» комбинациях: γK и т. п. В том же смысле Q_1 и Q_2 — псевдоскаляры (N — псевдовектор!) и должны содержать матрицу γ^5.

Непосредственным проецированием тензора $Q_{\mu\nu}$ находим

$$Q_0 = \frac{1}{2} Q^{\mu\nu} \left(e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu + e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu\right)$$

и т. д. Для вычисления удобно сначала выразить $Q_{\mu\nu}$ через взаимно ортогональные 4-векторы P, N, q, K:

$$Q^{\mu\nu} = \gamma^\mu \frac{\gamma P/2 + m}{s - m^2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\gamma P/2 + m}{u - m^2} \gamma^\mu - \frac{1}{t} \left[\gamma^\mu (\gamma K) \gamma^\nu - \gamma^\nu (\gamma K) \gamma^\mu\right].$$

Дальнейшее вычисление сводится к чисто алгебраическим преобразованиям с помощью приведенных в § 22 формул. Кроме

[1]) Альтернативный способ вычисления состоит в том, чтобы с самого начала рассматривать определенную систему отсчета (скажем, лабораторную) и для каждого фотона выбрать в качестве $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ два чисто пространственных ($e = (0, \mathbf{e})$) вектора, ортогональных по отношению к импульсу фотона и по отношению друг к другу. При этом, однако, все вычисления будут производиться в трехмерной форме, а результат не будет иметь инвариантного вида.

того, можно сделать в $Q^{\mu\nu}$ замены, которые не отразятся на результате при дальнейшем образовании произведения $\bar{u}'Q^{\mu\nu}u$. Например, поскольку

$$\bar{u}'(\gamma p + \gamma p')u = 2m\bar{u}'u,$$

$$\bar{u}'\gamma^5(\gamma q)u = \bar{u}'[\gamma^5(\gamma p) + (\gamma p')\gamma^5]u = 2m\bar{u}'\gamma^5 u,$$

то можно заменить в $Q^{\mu\nu}$ слагаемые

$$\gamma p + \gamma p' \to 2m, \quad \gamma^5(\gamma q) \to 2m\gamma^5. \tag{87,4}$$

Опустив детали вычислений, приведем результат [1]:

$$Q_0 = -ma_+, \qquad Q_1 = \frac{i}{2}a_+\gamma^5(\gamma K), \tag{87,5}$$

$$Q_2 = -ma_+\gamma^5, \quad Q_3 = ma_+ + \frac{1}{2}a_-(\gamma K),$$

где

$$a_\pm = \frac{1}{s-m^2} \pm \frac{1}{u-m^2}.$$

Для дальнейших вычислений удобно применить к $Q_{\mu\nu}$ тот же формальный прием, который был описан в § 8 для матрицы плотности фотона: четыре компоненты тензора (87,3) по направлениям $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ объединим в двухрядную матрицу Q, которую затем разложим по матрицам Паули. Аналогично формуле (8,18) получим

$$Q = Q_0 + \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3). \tag{87,6}$$

Что касается фигурирующего в (86,5) тензора $\bar{Q}_{\mu\nu} = \gamma^0 Q_{\mu\nu}^+ \gamma^0$, то используя (87,3) и (87,5), легко убедиться (с помощью правил (65,2а)), что его компоненты получаются из компонент $Q_{\mu\nu}$ заменой величин $Q_0, Q_1, \ldots$ на $\bar{Q}_0, \bar{Q}_1, \ldots$, где

$$\bar{Q}_0 = Q_0, \quad \bar{Q}_1 = -Q_1, \quad \bar{Q}_2 = -Q_2, \quad \bar{Q}_3 = Q_3, \tag{87,7}$$

и одновременной перестановкой индексов $\mu\nu$ [2]. В матричном виде это значит, что

$$\bar{Q} = \bar{Q}_0 + \bar{\mathbf{Q}}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{87,8}$$

---

[1]) Выражение (87,3) со значениями (87,5) соответствует виду (70,11—13), установленному в § 70 из общих соображений. Помимо равенств $f_3 = f_6 = 0$, следующих из T-инвариантности, здесь оказывается равной нулю еще одна инвариантная амплитуда (f_2). Это — свойство рассматриваемого приближения теории возмущений, и оно исчезло бы в более высоких приближениях.

[2]) Для матрицы $Q_{\mu\nu}$ в исходной форме (86,4) мы имели бы просто $\bar{Q}_{\mu\nu} = Q_{\nu\mu}$. Это свойство, однако, теряется в результате преобразований, включающих замены типа (87,4) и т. п.

Уточним теперь смысл 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ в их отношении к поляризации фотонов. Для каждого из фотонов независимые направления поляризации будут определяться поперечными (по отношению к импульсу фотона $\mathbf{k}$) составляющими 3-векторов $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$ [1]). Легко видеть, что как в системе центра инерции, так и в лабораторной системе (системе покоя начального электрона) вектор $\mathbf{P}$ лежит в плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$, а вектор $\mathbf{N}$ перпендикулярен этой плоскости. Поэтому направление $\mathbf{e}^{(1)}$ имеет смысл поляризации перпендикулярно плоскости рассеяния, а направление $\mathbf{e}^{(2)}$ — поляризации в плоскости рассеяния. Надо также учесть, что параметры Стокса ξ_1, ξ_2, ξ_3 определяются по отношению к осям xyz, образующим правовинтовую систему (с осью z вдоль направления $\mathbf{k}$). Легко видеть, что для начального фотона такую систему составляют векторы $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}_\perp$, $\mathbf{k}$, а для конечного фотона — векторы $\mathbf{N}$, $-\mathbf{P}'_\perp$, $\mathbf{k}'$ ($\mathbf{P}_\perp$, $\mathbf{P}'_\perp$ — составляющие $\mathbf{P}$, перпендикулярные соответственно $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$). Изменение знака $e^{(2)}$ в матрице плотности фотона (8.17) эквивалентно изменению знака ξ_1 и ξ_2. Поэтому матрицы плотности начального и конечного фотонов, отнесенные к 4-ортам $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, будут

$$\begin{aligned} \rho^{(\gamma)} &= \frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\sigma}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3); \\ \rho^{(\gamma)\prime} &= \frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{\sigma}), \quad \boldsymbol{\xi}' = (-\xi_1', -\xi_2', \xi_3'). \end{aligned} \tag{87,9}$$

Теперь тензорный след

$$\rho^{(\gamma)\prime}_{\lambda\mu} Q^{\mu\nu} \rho^{(\gamma)}_{\nu\rho} \tilde{\bar{Q}}^{\rho\lambda}$$

вычисляется как след матричного произведения матриц (87,6—9) с помощью (33,5).

В результате получается

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 = 8\pi^2 e^4 \,\mathrm{Sp}\,\{&(\rho^{(e)\prime} Q_0 \rho^{(e)} \bar{Q}_0 + \rho^{(e)\prime} \mathbf{Q} \rho^{(e)} \bar{\mathbf{Q}}) + \\ &+ (\xi + \xi')(\rho^{(e)\prime} Q_0 \rho^{(e)} \bar{\mathbf{Q}} + \rho^{(e)\prime} \mathbf{Q} \rho^{(e)} \bar{Q}_0) - i(\xi - \xi')[\rho^{(e)\prime} \mathbf{Q} \rho^{(e)} \bar{\mathbf{Q}}] + \\ &+ (\xi\xi')(\rho^{(e)\prime} Q_0 \rho^{(e)} \bar{Q}_0 - \rho^{(e)\prime} \mathbf{Q} \rho^{(e)} \bar{\mathbf{Q}}) + \rho^{(e)\prime}(\xi'\mathbf{Q})\rho^{(e)}(\xi\bar{\mathbf{Q}}) + \\ &+ \rho^{(e)\prime}(\xi\mathbf{Q})\rho^{(e)}(\xi'\bar{\mathbf{Q}}) - i[\xi\xi'](\rho^{(e)\prime} Q_0 \rho^{(e)} \bar{\mathbf{Q}} - \rho^{(e)\prime} \mathbf{Q} \rho^{(e)} \bar{Q}_0)\}. \end{aligned} \tag{87,10}$$

Рассеяние на неполяризованных электронах

Вычислим до конца сечение рассеяния поляризованных фотонов неполяризованным электроном, просуммированное по поляризациям конечного электрона. Для этого надо положить в

[1]) Продольные же компоненты $\mathbf{e}$ (как и временные компоненты 4-векторов e) можно при этом просто игнорировать: их несущественность обеспечивается калибровочной инвариантностью.

(87,10)

$$\rho^{(e)} = \frac{1}{2}(\gamma p + m), \qquad \rho^{(e)\prime} = \frac{1}{2}(\gamma p' + m)$$

и удвоить результат, который должен быть подставлен вместо $|M_{fi}|^2$ в формулу для сечения (64,22)

$$d\sigma = \frac{1}{32\pi^2}\frac{dt\,d\varphi}{(s-m^2)^2}|M_{fi}|^2$$

(φ — азимут в системе центра инерции или в лабораторной системе). Ряд членов в (87,10) обращается тождественно в нуль. Вычисление остальных членов приводит к следующему окончательному результату (в обозначениях (86,15)):

$$d\sigma = \frac{1}{2}d\bar\sigma + 2r_e^2\frac{dy\,d\varphi}{x^2}\left\{(\xi_3+\xi_3')\left[-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right]+\right.$$
$$+\xi_1\xi_1'\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\right)+\xi_2\xi_2'\frac{1}{4}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}-\frac{2}{y}\right)+$$
$$\left.+\xi_3\xi_3'\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{2}\right]\right\}, \qquad (87,11)$$

где $d\bar\sigma$ — сечение рассеяния неполяризованных фотонов, даваемое формулой (86,9); множитель $1/2$ связан с тем, что в (87,11) нет суммирования по поляризациям конечного фотона.

В лабораторной системе формула (87,11) принимает вид

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{4}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 do'\{F_0+F_3(\xi_3+\xi_3')+F_{11}\xi_1\xi_1'+F_{22}\xi_2\xi_2'+F_{33}\xi_3\xi_3'\},$$
$$do' = \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi, \qquad (87,12)$$

где

$$F_0 = \frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-\sin^2\vartheta, \qquad F_3 = \sin^2\vartheta,$$
$$F_{11} = 2\cos\vartheta, \qquad F_{22} = \left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}\right)\cos\vartheta, \qquad F_{33} = 1+\cos^2\vartheta \qquad (87,13)$$

(*U. Fano*, 1949). Заметим, что хотя выражение (87,12) не содержит явной зависимости от азимута плоскости рассеяния φ, но имеется неявная зависимость, поскольку параметры ξ_1, ξ_2, ξ_3 определяются относительно осей xyz, связанных с плоскостью рассеяния. Напомним, что ось x для обоих фотонов одинакова и перпендикулярна плоскости рассеяния:

$$x \parallel [\mathbf{kk}'],$$

а оси y лежат в плоскости рассеяния:

$$y \parallel [\mathbf{k}[\mathbf{kk}']], \qquad y' \parallel [\mathbf{k}'[\mathbf{kk}']].$$

Взяв сумму сечений, различающихся знаком ξ' (т. е. положив $\xi'=0$ и удвоив результат), мы получим полное (просуммированное по поляризациям конечного фотона) сечение рассеяния поляризованного фотона на неполяризованном электроне. Обозначив его $d\sigma(\xi)$, имеем

$$d\sigma(\xi)=\frac{1}{2}r_e^2\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 F\,do', \tag{87,14}$$

где

$$F=F_0+\xi_3F_3=\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-(1-\xi_3)\sin^2\vartheta. \tag{87,15}$$

Мы видим, что сечение рассеяния фотонов, поляризованных перпендикулярно плоскости рассеяния ($\xi_3=1$), больше, чем для фотонов, поляризованных в плоскости рассеяния ($\xi_3=-1$). От циркулярной же поляризации сечение не зависит. Оно не зависит также и от параметра ξ_1. Поэтому сечение рассеяния совпадает с сечением для неполяризованных фотонов, если отсутствует линейная поляризация относительно осей x или y ($\xi_3=0$) или даже если имеется поляризация относительно направлений, составляющих 45° с этими осями.

Аналогичными свойствами обладает сечение рассеяния неполяризованных фотонов с детектированием поляризованного фотона. Это сечение (обозначим его $d\sigma(\xi')$) получится из формулы (87,12), если положить в ней $\xi=0$:

$$d\sigma(\xi')=\frac{1}{4}r_e^2\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2F'\,do',\quad F'=F_0+\xi_3'F_3. \tag{87,16}$$

Из формулы (87,12) можно найти также поляризацию вторичного фотона как такового; параметры этой поляризации обозначим через $\xi^{(f)}$, в отличие от детектируемой поляризации ξ'. Согласно изложенным в § 65 правилам величины $\xi_i^{(f)}$ равны отношениям коэффициентов при ξ_i' к члену, не содержащему ξ':

$$\xi_1^{(f)}=\frac{F_{11}}{F}\xi_1,\quad \xi_2^{(f)}=\frac{F_{22}}{F}\xi_2,\quad \xi_3^{(f)}=\frac{F_3+F_{33}\xi_3}{F}. \tag{87,17}$$

В частности, при рассеянии неполяризованного фотона

$$\xi_1^{(f)}=\xi_2^{(f)}=0,\quad \xi_3^{(f)}=\frac{\sin^2\vartheta}{\omega/\omega'+\omega'/\omega-\sin^2\vartheta}. \tag{87,18}$$

При этом $\xi_3^{(f)}>0$, т. е. вторичный фотон поляризуется перпендикулярно плоскости рассеяния. Циркулярная же поляризация вторичного фотона возникает, лишь если первичный фотон циркулярно поляризован: $\xi_2^{(f)}\neq0$ только при $\xi_2\neq0$.

Рассмотрим случай, когда падающий фотон полностью поляризован линейно $(\xi_2=0,\ \xi_1^2+\xi_3^2=1)$, и найдем сечение рассеяния, в котором детектируется тоже линейная поляризация вторичного фотона. Выразив параметры ξ_i и ξ'_i через компоненты векторов поляризации фотонов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$, получим следующее выражение для сечения рассеяния:

$$d\sigma=\frac{r_e^2}{4}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-2+4\cos^2\Theta\right)do', \qquad (87,19)$$

где Θ — угол между направлениями поляризации падающего и рассеянного фотонов[1]).

Согласно этой формуле сечение ведет себя существенно различным образом в случаях, когда поляризации $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ взаимно перпендикулярны и когда они лежат в одной плоскости. Отличая эти два случая индексами $\perp$ и $\|$, имеем в нерелятивистском пределе ($\omega \ll m$, $\omega' \approx \omega$)

$$d\sigma_\perp=0, \quad d\sigma_\| = r_e^2\cos^2\Theta\, do' \qquad (87,20)$$

в согласии с классическими формулами. В обратном, ультрарелятивистском случае имеем $\omega \gg m$, $\omega' \approx m/(1-\cos\vartheta)$. Здесь надо различать области больших и малых углов (ω/ω' велико или мало):

$$\begin{aligned} &d\sigma_\perp = d\sigma_\| = \frac{1}{4}r_e^2\frac{\omega'}{\omega}do' = \frac{1}{4}r_e^2\frac{m\,do'}{\omega(1-\cos\vartheta)}, \quad \vartheta^2 \gg \frac{m}{\omega};\\ &d\sigma_\perp = 0, \quad d\sigma_\| = r_e^2\cos^2\Theta\, do', \quad \vartheta^2 \ll \frac{m}{\omega}. \end{aligned} \qquad (87,21)$$

Мы видим, что в области очень малых углов сечение рассеяния совпадает с классическим. Равенство же $d\sigma_\perp \approx d\sigma_\|$ при не слишком малых углах означает, что в этой области в ультрарелятивистском случае рассеянное излучение не поляризовано; подчеркнем, однако, что это заключение относится именно к линейно поляризованному падающему фотону: из (87,17) видно, что для циркулярно поляризованного фотона в ультрарелятивистском случае $\xi_2^{(f)} \approx \cos\vartheta\cdot\xi_2$.

Рассеяние на поляризованных электронах

Для поляризованных электронов вычисление следов в формуле (87,10) становится очень громоздким, хотя и не представ-

---

[1]) Формулу (87,19) саму по себе было бы проще получить, положив с самого начала в амплитуде рассеяния (86,3) $e=(0,\mathbf{e})$, $e'=(0,\mathbf{e}')$ и произведя дальнейшее вычисление квадрата амплитуды в трехмерном виде (т. е. разделив временны́е и пространственные компоненты 4-векторов).

Усреднив $\cos^2\Theta=(\mathbf{e}\mathbf{e}')^2$ по направлениям $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ (с помощью (45,4а)) и удвоив сечение (переход к суммированию по $\mathbf{e}'$), мы вернемся, конечно, к (86,9).

ляет принципиальных затруднений. Мы приведем здесь некоторые окончательные результаты такого расчета [1]).

В общем случае сечение зависит как от поляризационных параметров начального и конечного фотонов ξ и ξ', так и от поляризаций начального и конечного электронов, характеризующихся векторами ζ и ζ'. Зависимость сечения от каждого из этих параметров линейна. Сечение имеет вид

$$d\sigma = \frac{1}{2}\, d\sigma(\xi, \xi') +$$
$$+ \frac{r_e^2}{8}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 do' \left\{ \mathbf{f}\zeta\xi_2 + \mathbf{f}'\zeta\xi_2' + \mathbf{g}\zeta'\xi_2 + \mathbf{g}'\zeta'\xi_2' + G_{ik}\zeta_i\zeta_k' + \ldots \right\}. \quad (87{,}22)$$

Здесь $d\sigma(\xi, \xi')$ — сечение (87,12). Выписаны все члены, содержащие произведения двух поляризационных параметров. Опущены члены, содержащие произведения трех или четырех параметров; эти члены несущественны, если нас интересуют корреляции между поляризациями лишь двух частиц: они выпадают, когда поляризационные параметры двух других частиц полагаются равными нулю. Приведем значения некоторых из коэффициентов в лабораторной системе отсчета:

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)(\mathbf{k}\cos\vartheta + \mathbf{k}'),$$
$$\mathbf{f}' = -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)(\mathbf{k} + \mathbf{k}'\cos\vartheta), \quad (87{,}23)$$
$$\mathbf{g} = -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)\left[(\mathbf{k}\cos\vartheta + \mathbf{k}') - (1+\cos\vartheta)\frac{\omega+\omega'}{\omega-\omega'+2m}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\right],$$
$$\mathbf{g}' = -\frac{1}{m}(1-\cos\vartheta)\left[(\mathbf{k} + \mathbf{k}'\cos\vartheta) - (1+\cos\vartheta)\frac{\omega+\omega'}{\omega-\omega'+2m}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\right].$$

В сечении (87,22) отсутствует член вида $\mathbf{G}\zeta$; это значит, что поляризация электрона не влияет на полное (просуммированное по ξ' и ζ') сечение рассеяния поляризованных фотонов. Отсутствует также член вида $\mathbf{G}'\zeta'$; это значит, что при рассеянии неполяризованных фотонов электрон отдачи не поляризуется.

Мы видим также, что в члены, билинейные по поляризациям электрона и фотона, входят только параметры ξ_2, ξ_2', отвечающие круговой поляризации фотона. Векторы же поляризации электронов ζ и ζ' входят в виде скалярных произведений $\mathbf{f}\zeta, \ldots$, содержащих лишь проекции этих векторов на плоскость рассеяния. Поэтому, например, сечение рассеяния поляризованного

[1]) Более подробные сведения можно найти в обзорных статьях: *Tolhoek H. A.*//Rev. Mod. Phys. — 1956. — Vol. 28. — P. 277; *McMaster W. H.*// Rev. Mod. Phys. — 1961. — Vol. 33. — P. 8.

фотона поляризованным электроном

$$d\sigma(\xi, \zeta) = d\sigma(\xi) + \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \xi_2 \mathbf{f}\zeta \, do' \tag{87,24}$$

отличается от $d\sigma(\xi)$ только при наличии у фотона круговой поляризации, а у электронов — отличной от нуля проекции среднего спина на плоскость рассеяния. По той же причине электрон отдачи поляризуется только в случае, если фотон обладает круговой поляризацией; вектор же возникающей поляризации электрона лежит при этом в плоскости рассеяния:

$$\zeta^{(f)} = \frac{1}{F} \xi_2 \mathbf{g}. \tag{87,25}$$

Соотношения симметрии

В заключение укажем, что качественные свойства поляризационных эффектов при рассеянии фотонов на электронах следуют уже из общих требований симметрии.

Параметр ξ_2 циркулярной поляризации — псевдоскаляр (см. § 8). Поэтому в силу требования P-инвариантности члены вида $\infty \xi_2$ (или $\infty \xi_2'$) в сечении рассеяния могли бы возникнуть лишь как произведение ξ_2 на какой-либо псевдоскаляр, составленный из имеющихся в нашем распоряжении векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ [1]). Но из двух полярных векторов нельзя составить псевдоскаляр. Отсюда и следует, что указанных членов в сечении не может быть.

Параметры линейной поляризации ξ_1 и ξ_3 связаны с компонентами двумерного (в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$) симметричного тензора

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\rho_{\alpha\beta}^{(\gamma)} + \rho_{\beta\alpha}^{(\gamma)}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 \\ \xi_1 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}.$$

В данном случае одна из осей поляризации выбрана вдоль вектора $\mathbf{v} = [\mathbf{k}\mathbf{k}']$, а другая лежит в плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ (вдоль вектора $[\mathbf{k}\mathbf{v}]$ или $[\mathbf{k}'\mathbf{v}]$ для одного или другого фотона). Члены $\infty \xi_1$ могли бы возникнуть в сечении лишь как произведения $S_{\alpha\beta} v_\alpha [\mathbf{k}'\mathbf{v}]_\beta$ (или, что то же, $S_{\alpha\beta} v_\alpha k'_\beta$) и т. п. Но поскольку $\mathbf{v}$ — аксиальный, $\mathbf{k}$ — полярный вектор, а $S_{\alpha\beta}$ — истинный тензор, то такие произведения не инвариантны по отношению к инверсии. Поэтому членов $\infty \xi_1$ (или $\infty \xi_1'$) в сечении тоже не может быть.

[1]) Рассматриваем процесс в лабораторной системе, где $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$. Очевидно, что интересующие нас следствия требований симметрии (наличие или отсутствие тех или иных членов в сечении) не зависят от выбора системы отсчета.

Члены же $\infty \xi_3$ (или $\infty \xi_3'$) возникают как произведения $S_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta$ и т. п. и соображениями симметрии не запрещаются.

Члены в сечении, пропорциональные электронной поляризации ζ, не запрещены по четности: такие члены могли бы быть образованы как произведения двух аксиальных векторов: $\boldsymbol{\zeta\nu}$. Они, однако, должны отсутствовать в рассмотренном нами первом не исчезающем приближении теории возмущений как следствие эрмитовости матрицы рассеяния в этом приближении (см. § 71).

В силу этой эрмитовости квадрат амплитуды рассеяния (а с ним и сечение) не меняется при перестановке начального и конечного состояний. В то же время сечение должно быть инвариантно по отношению к обращению времени — перестановке начального и конечного состояний вместе с одновременным изменением знака векторов импульса и момента всех частиц (параметры же Стокса ξ_1, ξ_2, ξ_3 при этом не меняются — см. § 8). Комбинируя оба эти требования, заключаем, что в рассматриваемом приближении сечение не должно меняться при одновременном изменении знака всех импульсов и моментов без перестановки начального и конечного состояний, т. е. при преобразовании

$$\mathbf{k} \to -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}' \to -\mathbf{k}', \quad \boldsymbol{\zeta} \to -\boldsymbol{\zeta}, \quad \boldsymbol{\zeta}' \to -\boldsymbol{\zeta}' \qquad (87{,}26)$$

и неизменных параметрах ξ, ξ'.

Преобразование (87,26) меняет знак произведения $\boldsymbol{\zeta\nu}$, и потому такие члены не могут фигурировать в сечении. Подчеркнем, однако, что этот запрет не является следствием строгих требований симметрии и может нарушаться в следующих приближениях теории возмущений.

Заметим, что симметрия по четности запрещает члены вида $\xi_1\xi_3$ и $\xi_2\xi_3$ в двойной корреляции между поляризациями фотонов друг с другом и не накладывает никаких ограничений на вид корреляции фотонов с электронами. Однако все члены вида $\xi_1\xi_2$, $\xi_1\zeta$, $\xi_3\zeta$ запрещены в первом приближении требованием инвариантности относительно преобразования (87,26). Так, члены вида $\xi_1\xi_2'$ и $\xi_1\zeta$ можно было бы образовать (с точки зрения соблюдения четности) как скаляры, например $\xi_2'(S_{\alpha\beta}k_\alpha'\nu_\beta)$ и $(S_{\alpha\beta}k_\alpha'\nu_\beta)$ $(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{k})$; эти комбинации, однако, меняют знак при преобразовании (87,26).

Разрешенные корреляционные члены вида $\xi_2\zeta$ могут быть образованы как произведения типа $\xi_2(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{k})$. Векторы поляризации электронов входят в них лишь в виде проекций на плоскость рассеяния.

Наконец, ряд соотношений между коэффициентами в разрешенных членах возникает из требований кросс-универсальности. Каналы реакции, различающиеся перестановкой начального и конечного фотонов, отвечают одному процессу — рассеянию фотона на электроне. Поэтому квадрат модуля амплитуды, а с ним и сечение рассеяния должны быть инвариантны по отношению к преобразованию, выражающему переход от одного из этих каналов к другому:

$$k \longleftrightarrow -k', \quad e \longleftrightarrow e'^{*}$$

при неизменных импульсах и поляризациях электронов. В трехмерном виде это преобразование означает замены:

$$\omega \longleftrightarrow -\omega', \quad \mathbf{k} \longleftrightarrow -\mathbf{k}', \quad \xi_1 \longleftrightarrow \xi_1', \quad \xi_2 \longleftrightarrow -\xi_2', \quad \xi_3 \longleftrightarrow \xi_3'. \qquad (87,27)$$

Изменение знака параметра ξ_2 очевидно из выражения $\xi_2 = i[\mathbf{e}\mathbf{e}^*]\mathbf{n}$, в котором вектор $[\mathbf{e}\mathbf{e}^*]$ при замене $\mathbf{e} \longleftrightarrow \mathbf{e}^*$ меняет знак, а вектор $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ при замене $\mathbf{k} \longleftrightarrow -\mathbf{k}$, $\omega \longleftrightarrow -\omega$ не меняется. Преобразование (87,27), не затрагивая импульсов электронов, оставляет лабораторную систему лабораторной. Поэтому сечение (87,22) не должно менять своего вида при этом преобразовании; формулы (87,12), (87,22—23) действительно удовлетворяют этому условию.

§ 88. Двухфотонная аннигиляция электронной пары

Аннигиляции электрона и позитрона (4-импульсы p_- и p_+) с образованием двух фотонов (k_1 и k_2) отвечают две диаграммы:

(88,1)

Они отличаются от диаграмм рассеяния фотона на электроне заменой

$$p \to p_-, \quad p' \to -p_+, \quad k \to -k_1, \quad k' \to k_2. \qquad (88,2)$$

Оба процесса — два перекрестных канала одной и той же (обобщенной) реакции. После замены (88,2) кинематические инварианты (86,2) приобретают следующий смысл:

$$\begin{aligned} s &= (p_- - k_1)^2, \\ t &= (p_- + p_+)^2 = (k_1 + k_2)^2, \\ u &= (p_- - k_2)^2. \end{aligned} \qquad (88,3)$$

Если рассеяние фотона было s-каналом, то аннигиляция есть t-канал.

Квадрат $|M_{fi}|^2$ для аннигиляции (усредненный по поляризациям электронов и просуммированный по поляризациям фотонов), будучи выражен через инварианты s, u, совпадает с аналогичной величиной для рассеяния с изменением лишь смысла