конечного фотонов, отвечают одному процессу — рассеянию фотона на электроне. Поэтому квадрат модуля амплитуды, а с ним и сечение рассеяния должны быть инвариантны по отношению к преобразованию, выражающему переход от одного из этих каналов к другому:

$$k \leftrightarrow -k', \quad e \leftrightarrow e'^{*}$$

при неизменных импульсах и поляризациях электронов. В трехмерном виде это преобразование означает замены:

$$\omega \leftrightarrow -\omega', \quad \mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}', \quad \xi_1 \leftrightarrow \xi_1', \quad \xi_2 \leftrightarrow -\xi_2', \quad \xi_3 \leftrightarrow \xi_3'. \qquad (87{,}27)$$

Изменение знака параметра ξ_2 очевидно из выражения $\xi_2 = i[\mathbf{ee}^*]\mathbf{n}$, в котором вектор $[\mathbf{ee}^*]$ при замене $\mathbf{e} \leftrightarrow \mathbf{e}^*$ меняет знак, а вектор $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ при замене $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$, $\omega \leftrightarrow -\omega$ не меняется. Преобразование (87,27), не затрагивая импульсов электронов, оставляет лабораторную систему лабораторной. Поэтому сечение (87,22) не должно менять своего вида при этом преобразовании; формулы (87,12), (87,22—23) действительно удовлетворяют этому условию.

§ 88. Двухфотонная аннигиляция электронной пары

Аннигиляции электрона и позитрона (4-импульсы p_- и p_+) с образованием двух фотонов (k_1 и k_2) отвечают две диаграммы:

(88,1)

Они отличаются от диаграмм рассеяния фотона на электроне заменой

$$p \to p_-, \quad p' \to -p_+, \quad k \to -k_1, \quad k' \to k_2. \qquad (88{,}2)$$

Оба процесса — два перекрестных канала одной и той же (обобщенной) реакции. После замены (88,2) кинематические инварианты (86,2) приобретают следующий смысл:

$$\begin{aligned} s &= (p_- - k_1)^2, \\ t &= (p_- + p_+)^2 = (k_1 + k_2)^2, \\ u &= (p_- - k_2)^2. \end{aligned} \qquad (88{,}3)$$

Если рассеяние фотона было s-каналом, то аннигиляция есть t-канал.

Квадрат $|M_{fi}|^2$ для аннигиляции (усредненный по поляризациям электронов и просуммированный по поляризациям фотонов), будучи выражен через инварианты s, u, совпадает с аналогичной величиной для рассеяния с изменением лишь смысла инвариантов[1]). В формуле же для сечения (64,23), в множителях при $|M_{fi}|^2$, надо заменить: $s \leftrightarrow t$, причем для величины l имеем теперь согласно (64,15а)

$$l^2 = {}^1/_4 t\,(t - 4m^2).$$

Произведя соответствующие изменения в формуле (86,6), получим в результате сечение аннигиляции

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 \frac{m^2\,ds}{t\,(t-4m^2)}\left\{\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)^2+\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{s-m^2}{u-m^2}+\frac{u-m^2}{s-m^2}\right)\right\}. \quad (88,4)$$

Физическая область аннигиляционного канала есть область II на рис. 7 (см. с. 300). При заданном t (заданной энергии в системе центра инерции) интервал изменения s определяется уравнением границы $su = m^4$. Вместе с соотношением $s + t + u = 2m^2$ это дает

$$-\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{t\,(t-4m^2)} \leqslant s - m^2 \leqslant -\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{t\,(t-4m^2)}. \quad (88,5)$$

Интегрирование выражения (88,4) элементарно; результат надо еще разделить на 2, учитывая тождественность двух конечных частиц (фотонов). Таким образом, получим

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{2\tau^2(\tau-1)}\left[\left(\tau^2+\tau-\frac{1}{2}\right)\ln\frac{\sqrt{\tau}+\sqrt{\tau-1}}{\sqrt{\tau}-\sqrt{\tau-1}}-(\tau+1)\sqrt{\tau(\tau-1)}\right], \quad (88,6)$$

где $\tau = t/4m^2$ (*P. A. M. Dirac*, 1930).

В нерелятивистском пределе ($\tau \to 1$) находим отсюда

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{2\sqrt{\tau-1}} \quad (\text{н. р.}). \quad (88,7)$$

В ультрарелятивистском же случае ($\tau \to \infty$)

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{2\tau}(\ln 4\tau - 1) \quad (\text{у. р.}). \quad (88,8)$$

В лабораторной системе, в которой одна из частиц (скажем, электрон) до столкновения покоилась, инвариант τ есть

$$\tau = \frac{1}{2}(1+\gamma), \quad \gamma = \frac{\varepsilon_+}{m}. \quad (88,9)$$

---

[1]) При этом учитывается, что фотоны и электроны имеют одинаковое число независимых поляризаций (две) и потому несущественно, по которым $|M_{fi}|^2$ усредняется, а по которым суммируется.

Формулы (88,6—8) дают зависимость полного сечения от энергии налетающего позитрона:

$$\sigma=\frac{\pi r_e^2}{\gamma+1}\left[\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1}\ln\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)-\frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right]. \quad (88,10)$$

В частности, в нерелятивистском пределе [1])

$$\sigma=\pi r_e^2/v_+ \quad (\text{н. р.}), \quad (88,11)$$

где v_+ — скорость позитрона.

В системе центра инерции электрон, позитрон и оба фотона имеют одинаковые энергии $\varepsilon=\omega$. Инварианты:

$$m^2-s=2\varepsilon(\varepsilon-|\mathbf{p}|\cos\theta),\quad m^2-u=2\varepsilon(\varepsilon+|\mathbf{p}|\cos\theta),$$
$$t=4\varepsilon^2, \quad (88,12)$$

где θ — угол между импульсами электрона и одного из фотонов. Подставив (88,12) в (88,4), получим угловое распределение аннигиляционных фотонов

$$d\sigma=\frac{r_e^2m^2}{4\varepsilon|\mathbf{p}|}\left[\frac{\varepsilon^2+\mathbf{p}^2(1+\sin^2\theta)}{\varepsilon^2-\mathbf{p}^2\cos^2\theta}-\frac{2\mathbf{p}^4\sin^4\theta}{(\varepsilon^2-\mathbf{p}^2\cos^2\theta)^2}\right]do. \quad (88,13)$$

В ультрарелятивистском случае оно имеет симметричные максимумы в направлениях $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Вблизи $\theta=0$

$$d\sigma\approx\frac{r_e^2m^2\,do}{2\varepsilon^2(\theta^2+m^2/\varepsilon^2)} \quad (\text{у. р.}). \quad (88,14)$$

Полное сечение получается из (88,6):

$$\sigma=\pi r_e^2\frac{1-v^2}{4v}\left[\frac{3-v^4}{v}\ln\frac{1+v}{1-v}-2(2-v^2)\right], \quad (88,15)$$

где $v=|\mathbf{p}|/\varepsilon=\sqrt{\varepsilon^2-m^2}/\varepsilon$ — скорость сталкивающихся частиц.

Мы не будем рассматривать здесь в деталях поляризационные эффекты при аннигиляции [2]). Остановимся лишь на некоторых качественных особенностях этих эффектов в предельных случаях больших и малых скоростей v сталкивающихся частиц. Будем рассматривать процесс в системе центра инерции.

В пределе $v\to 0$ отличный от нуля вклад в сечение даст лишь состояние с орбитальным моментом относительного движения $l=0$. Но S-состояние системы «электрон + позитрон» имеет отрицательную четность (см. задачу к § 27). В нечетных же состояниях системы двух фотонов их поляризации взаимно ортогональны (см. § 9). Таким же свойством должны, следователь-

[1]) Эта формула, однако, неприменима, когда $v_+\lesssim\alpha$, и нельзя пренебрегать кулоновым взаимодействием компонент пары (ср. конец § 94).

[2]) См. *McMaster W. H.*//Rev. Mod. Phys. — 1961. — Vol. 33. — P. 8.

но, обладать в нерелятивистском случае и аннигиляционные фотоны.

Если электрон и позитрон поляризованы, то в том же нерелятивистском случае можно утверждать, что их аннигиляция возможна лишь при антипараллельных спинах. Действительно, поскольку аннигиляция происходит в S-состоянии, полный момент системы совпадает с полным спином частиц, равным 1 при параллельных спинах. Система же двух фотонов вообще не имеет состояний с полным моментом 1 (см. § 9).

В ультрарелятивистском пределе ($v \to 1$) аннигиляция продольно поляризованных (спиральных) электрона и позитрона возможна лишь при разных знаках их спиральностей[1]). В этом пределе спиральные частицы ведут себя как нейтрино (см. конец § 80), а потому аннигилирующие электрон и позитрон должны быть аналогичны нейтрино и антинейтрино, откуда и следует сделанное утверждение.

Аннигиляция же электрона и позитрона с одинаковыми спиральностями возникает в ультрарелятивистском случае лишь при учете членов, содержащих m. По порядку величины амплитуда этого процесса отличается множителем m/ε от амплитуды аннигиляции пары с параллельными спинами; сечение же отличается соответственно множителем $(m/\varepsilon)^2$.

Задача

Найти сечение образования электронной пары при столкновении двух фотонов (*G. Breit, J. A. Wheeler*, 1934).

Решение. Этот процесс обратен двухфотонной аннигиляции электронной пары. Квадраты амплитуды обоих процессов одинаковы, а их связи с сечением различаются лишь тем, что теперь $I^2 = (k_1k_2)^2 = t^2/4$. Поэтому

$$d\sigma_{\text{обр}} = d\sigma_{\text{анн}} (t - 4m^2)/t.$$

В системе центра инерции ($t = 4\varepsilon^2 = 4\omega^2$)

$$d\sigma_{\text{обр}} = v^2 \, d\sigma_{\text{анн}},$$

где v — скорость компонент пары. При интегрировании с целью нахождения полного сечения надо учесть, что ввиду нетождественности двух конечных частиц (электрон и позитрон) не надо делить результат на 2, как в случае аннигиляции. Поэтому (в системе центра инерции)

$$\sigma_{\text{обр}} = 2v^2\sigma_{\text{анн}} = \frac{\pi r_e^2}{2}(1 - v^2)\left\{(3 - v^4)\ln\frac{1+v}{1-v} - 2v(2 - v^2)\right\}. \quad (1)$$

В произвольной системе отсчета K, в которой два фотона k_1 и k_2 летят навстречу друг другу, имеем (из инвариантности k_1k_2)

$$\omega_1\omega_2 = \omega^2,$$

[1]) Поскольку направления импульсов частиц в системе центра инерции противоположны, различным по знаку спиральностям отвечают параллельные спины.

где ω — энергия фотонов в системе центра инерции. Поскольку в этой системе энергии фотонов и компонент пары совпадают, то $\omega=\varepsilon=m/\sqrt{1-v^2}$. Поэтому для перехода к системе K надо положить в (1)

$$v=\sqrt{1-\frac{m^2}{\omega_1\omega_2}}.$$

§ 89. Аннигиляция позитрония

В силу сохранения импульса аннигиляция электрона и позитрона в позитронии должна сопровождаться испусканием по крайней мере двух фотонов. Такой распад, однако, возможен (в основном состоянии) только для парапозитрония. В § 9 было показано, что полный момент системы двух фотонов не может быть равен 1. Поэтому ортопозитроний, находящийся в состоянии $^3S_1$, не может распасться на два фотона. Более того, поскольку в состоянии $^3S_1$ позитроний представляет собой зарядово-нечетную систему (см. задачу к § 27), то в силу теоремы Фарри (см. § 79) невозможен его распад и вообще на любое четное число фотонов. Напротив, в состоянии $^1S_0$ позитроний зарядово-четен, и потому запрещен распад парапозитрония на любое нечетное число фотонов.

Основным процессом, определяющим время жизни позитрония, является, таким образом, двухфотонная аннигиляция в случае парапозитрония и трехфотонная аннигиляция в случае ортопозитрония (*И. Я. Померанчук*, 1948). Вероятность распада можно связать с сечением аннигиляции свободной пары.

Импульсы электрона и позитрона в позитронии $\sim me^2/\hbar$, т. е. малы по сравнению с mc. Поэтому при вычислении вероятности аннигиляции можно перейти к пределу двух частиц, покоящихся в начале координат. Пусть $\bar{\sigma}_{2\gamma}$ — сечение двухфотонной аннигиляции свободной пары, усредненное по направлениям спинов обеих частиц. В нерелятивистском пределе согласно (88,11)[1])

$$\bar{\sigma}_{2\gamma}=\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{c}{v}, \tag{89,1}$$

где v — относительная скорость частиц. Мы получим вероятность аннигиляции $\bar{w}_{2\gamma}$, умножив $\bar{\sigma}_{2\gamma}$ на плотность потока, равную $v|\psi(0)|^2$. Здесь $\psi(r)$ — нормированная на 1 волновая функция основного состояния позитрония:

$$\psi(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a},\qquad a=\frac{2\hbar^2}{me^2} \tag{89,2}$$

(боровский радиус позитрония a в два раза больше радиуса атома водорода из-за вдвое меньшей приведенной массы). Эта

[1]) Формулы (89,1—7) написаны в обычных единицах.