

где ω — энергия фотонов в системе центра инерции. Поскольку в этой системе энергии фотонов и компонент пары совпадают, то $\omega = \varepsilon = m/\sqrt{1-v^2}$. Поэтому для перехода к системе K надо положить в (1)

$$v = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_1 \omega_2}}.$$

§ 89. Аннигиляция позитрония

В силу сохранения импульса аннигиляция электрона и позитрона в позитронии должна сопровождаться испусканием по крайней мере двух фотонов. Такой распад, однако, возможен (в основном состоянии) только для парапозитрония. В § 9 было показано, что полный момент системы двух фотонов не может быть равен 1. Поэтому ортопозитроний, находящийся в состоянии 3S_1 , не может распасться на два фотона. Более того, поскольку в состоянии 3S_1 позитроний представляет собой зарядово-нечетную систему (см. задачу к § 27), то в силу теоремы Фарри (см. § 79) невозможен его распад и вообще на любое четное число фотонов. Напротив, в состоянии 1S_0 позитроний зарядово-четен, и потому запрещен распад парапозитрония на любое нечетное число фотонов.

Основным процессом, определяющим время жизни позитрония, является, таким образом, двухфотонная аннигиляция в случае парапозитрония и трехфотонная аннигиляция в случае ортопозитрония (И. Я. Померанчук, 1948). Вероятность распада можно связать с сечением аннигиляции свободной пары.

Импульсы электрона и позитрона в позитронии $\sim me^2/\hbar$, т. е. малы по сравнению с mc . Поэтому при вычислении вероятности аннигиляции можно перейти к пределу двух частиц, находящихся в начале координат. Пусть $\bar{\sigma}_{2\gamma}$ — сечение двухфотонной аннигиляции свободной пары, усредненное по направлениям спинов обеих частиц. В нерелятивистском пределе согласно (88,11)¹⁾

$$\bar{\sigma}_{2\gamma} = \pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c}{v}, \quad (89,1)$$

где v — относительная скорость частиц. Мы получим вероятность аннигиляции $\bar{w}_{2\gamma}$, умножив $\bar{\sigma}_{2\gamma}$ на плотность потока, равную $v|\psi(0)|^2$. Здесь $\psi(r)$ — нормированная на 1 волновая функция основного состояния позитрония:

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}, \quad a = \frac{2\hbar^2}{me^2} \quad (89,2)$$

(боровский радиус позитрония a в два раза больше радиуса атома водорода из-за вдвое меньшей приведенной массы). Эта

¹⁾ Формулы (89,1—7) написаны в обычных единицах.

вероятность, однако, отвечает усредненному по спидам начальному состоянию. Между тем в позитронии из четырех возможных спиновых состояний системы двух частиц способно к двухфотонной аннигиляции лишь одно (с полным спином 0). Поэтому средняя вероятность распада $\bar{w}_{2\gamma}$ связана с вероятностью распада парапозитрония w_0 соотношением $\bar{w}_{2\gamma} = w_0/4$. Таким образом,

$$w_0 = 4 |\psi(0)|^2 (v\bar{\sigma}_{2\gamma})_{\sigma \rightarrow 0}. \quad (89,3)$$

Подставив значения величин из (89,1—2), получим для продолжительности жизни парапозитрония

$$\tau_0 = \frac{2\hbar}{mc^2\alpha^5} = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ с}. \quad (89,4)$$

Обратим внимание на то, что ширина уровня $\Gamma_0 = \hbar/\tau_0$ мала по сравнению с его энергией

$$|E_{\text{осн}}| = \frac{mc^4}{4\hbar^2} = mc^2 \frac{\alpha^2}{4}.$$

Именно это обстоятельство и позволяет рассматривать позитроний как квазистационарную систему.

Аналогичным образом найдем, что вероятность распада ортопозитрония связана с усредненным по спидам сечением трехфотонной аннигиляции свободной пары соотношением

$$w_1 = \frac{4}{3} \bar{w}_{3\gamma} = \frac{4}{3} |\psi(0)|^2 (v\bar{\sigma}_{3\gamma})_{\sigma \rightarrow 0}, \quad (89,5)$$

($3/4$ — относительный статистический вес состояния со спином 1). Забегая вперед, укажем, что

$$\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{4(\pi^2 - 9)c}{3v} \alpha \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad (89,6)$$

Поэтому продолжительность жизни ортопозитрония

$$\tau_1 = \frac{9\pi}{2(\pi^2 - 9)} \frac{\hbar}{mc^2\alpha^5} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ с}. \quad (89,7)$$

Неравенство $\Gamma_1 \ll |E_{\text{осн}}|$ в этом случае, разумеется, выполняется еще в большей степени, чем для парапозитрония.

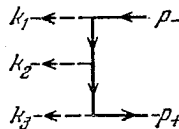
Вычислим сечение трехфотонной аннигиляции свободной пары (A. Ore, J. L. Powell, 1949).

Согласно (64,18) сечение рассматриваемого процесса в системе центра инерции выражается через квадрат амплитуды формулой

$$d\sigma_{3\gamma} = \frac{(2\pi)^4 |M_{fi}|^2}{4I} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 2m) \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3}{(2\pi)^9 2\omega_1 \cdot 2\omega_2 \cdot 2\omega_3}, \quad (89,8)$$

причем согласно (64,16) $I = 2m \cdot \frac{m}{2} v = m^2 v$, где v — относительная скорость позитрона и электрона (которую предполагаем малой); k_1, k_2, k_3 и $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — волновые векторы и частоты возникающих фотонов; δ -функции выражают законы сохранения энергии и импульса. В силу этих законов три частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ должны изображаться длинами сторон треугольника с периметром $2m$. Другими словами, величины импульсов k_1, k_2, k_3 и углы между ними полностью определяются заданием двух частот.

Трехфотонной аннигиляции отвечают диаграмма



и еще пять диаграмм, получающихся перестановкой фотонов k_1, k_2, k_3 . Соответствующую амплитуду запишем в виде

$$M_{fi} = (4\pi)^{3/2} e_{\lambda}^{(3)*} e_{\mu}^{(2)*} e_{\nu}^{(1)*} \bar{u}(-p_+) Q^{\lambda\mu\nu} u(p_-), \quad (89,9)$$

где

$$Q^{\lambda\mu\nu} = \sum_{\text{пер}} \gamma^{\lambda} G(k_3 - p_+) \gamma^{\mu} G(p_- - k_1) \gamma^{\nu}, \quad (89,10)$$

причем сумма берется по всем перестановкам номеров фотонов 1, 2, 3 вместе с одновременными такими же перестановками соответствующих тензорных индексов $\lambda\mu\nu$. Квадрат модуля амплитуды, усредненный по поляризациям электрона и позитрона и просуммированный по поляризациям фотонов:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{поляри}} |M_{fi}|^2 = (4\pi)^3 \text{Sp} \{ \rho_+ Q^{\lambda\mu\nu} \rho_- \bar{Q}_{\lambda\mu\nu} \}, \quad (89,11)$$

где

$$\rho_- = \frac{1}{2} (\gamma p_- + m), \quad \rho_+ = \frac{1}{2} (\gamma p_+ - m).$$

Матрицы $\bar{Q}^{\lambda\mu\nu}$ отличаются от матриц $Q^{\lambda\mu\nu}$ обращением порядка множителей в каждом члене суммы. В интересующем нас предельном случае малых скоростей электрона и позитрона можно положить их 3-импульсы p_- и p_+ равными нулю, т. е. положить $p_- = p_+ = (m, 0)$. Тогда электронные функции Грина

$$G(p_- - k_1) = \frac{\gamma p_- - \gamma k_1 + m}{(p_- - k_1)^2 - m^2} \approx \frac{-\gamma k_1 + m(\gamma^0 + 1)}{-2m\omega_1}$$

и т. п., а матрицы плотности сводятся к

$$\rho_{\mp} = \frac{m}{2} (\gamma^0 \pm 1).$$

При перемножении в (89,11) возникает большое количество членов. Однако число подлежащих вычислению членов можно сильно уменьшить, если воспользоваться в полной мере симметрией по отношению к перестановкам фотонов. Так, достаточно перемножить шесть членов в $Q^{\lambda\mu\nu}$ (89,10) лишь с одним каким-либо членом в $\bar{Q}_{\lambda\mu\nu}$. В оставшихся, таким образом, шести следах тоже можно выделить некоторые части, переходящие друг в друга при различных перестановках фотонов. Возникающие при раскрытии следов произведения 4-векторов p, k_1, k_2, k_3 выражаются все через частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Поскольку $p = (m, 0)$, то $pk_1 = m\omega_1, \dots$. Произведения же k_1k_2, \dots определяются из уравнения сохранения 4-импульса: $2p = k_1 + k_2 + k_3$; так, переписав это равенство в виде $2p - k_3 = k_1 + k_2$ и возведя его в квадрат, получим

$$k_1k_2 = 2m(m - \omega_3), \dots \quad (89,12)$$

В результате все же довольно длинного вычисления получается

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{поля}} |M_{fi}|^2 = (4\pi)^3 e^6 \cdot 16 \left[\left(\frac{m - \omega_1}{\omega_2\omega_3} \right)^2 + \left(\frac{m - \omega_2}{\omega_1\omega_3} \right)^2 + \left(\frac{m - \omega_3}{\omega_1\omega_2} \right)^2 \right].$$

Подставив это выражение в (89,8), найдем дифференциальное сечение трехфотонной аннигиляции:

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{e^6}{\pi^2 m^2 v} \left[\left(\frac{m - \omega_1}{\omega_2\omega_3} \right)^2 + \left(\frac{m - \omega_2}{\omega_1\omega_3} \right)^2 + \left(\frac{m - \omega_3}{\omega_1\omega_2} \right)^2 \right] \times \\ \times \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 2m) \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3}{\omega_1\omega_2\omega_3}. \quad (89,13)$$

Здесь надо еще исключить δ -функции. Первая из них устраняется интегрированием по d^3k_3 , после чего заменяем остальные дифференциалы:

$$d^3k_1 d^3k_2 \rightarrow 4\pi\omega_1^2 d\omega_1 \cdot 2\pi\omega_2^2 d(\cos\theta_{12}) d\omega_2,$$

где θ_{12} — угол между \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 ; подразумевается, что уже произведено интегрирование по направлениям \mathbf{k}_1 и азимуту \mathbf{k}_2 относительно \mathbf{k}_1 . Дифференцируя равенство

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos\theta_{12}},$$

находим

$$d \cos\theta_{12} = \frac{\omega_3}{\omega_1\omega_2} d\omega_3.$$

Интегрированием по ω_3 устраняем вторую δ -функцию. В результате получим сечение для аннигиляции с образованием фотонов

с заданными энергиями в виде

$$d\bar{\sigma}_{3\nu} = \frac{1}{6} \frac{8e^6}{3vm^2} \left\{ \left(\frac{m - \omega_3}{\omega_1\omega_2} \right)^2 + \left(\frac{m - \omega_2}{\omega_1\omega_3} \right)^2 + \left(\frac{m - \omega_1}{\omega_2\omega_3} \right)^2 \right\} d\omega_1 d\omega_2 \quad (89,14)$$

(имея в виду дальнейшее интегрирование по частотам, мы ввели сюда множитель $1/6$, учитывающий тождественность фотонов — ср. примеч. на с. 287).

Каждая из частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ может пробегать значения между 0 и m (значение m достигается двумя частотами, когда третья равна нулю). При заданном ω_1 частота ω_2 меняется между $m - \omega_1$ и m . Интегрируя (89,14) по ω_2 в этих пределах, получаем спектральное распределение фотонов распада:

$$d\bar{\sigma}_{3\nu} = \frac{8e^6}{3vm^3} F(\omega_1) d\omega_1,$$

$$F(\omega_1) = \frac{\omega_1(m - \omega_1)}{(2m - \omega_1)^2} + \frac{2m - \omega_1}{\omega_1} + \left[\frac{2m(m - \omega_1)}{\omega_1^2} - \frac{2m(m - \omega_1)^2}{(2m - \omega_1)^3} \right] \ln \frac{m - \omega_1}{m}.$$

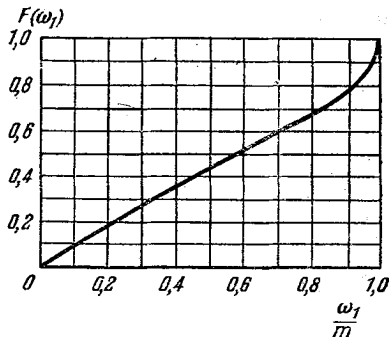


Рис. 14

Функция $F(\omega_1)$ монотонно возрастает от нуля при $\omega_1 = 0$ до 1 при $\omega_1 = m$; на рис. 14 изображен ее график.

Полное сечение аннигиляции получается интегрированием (89,14) по обеим частотам:

$$\bar{\sigma}_{3\nu} = \frac{4e^6}{3vm^2} 3 \int_0^m \int_{m-\omega_1}^m \frac{(\omega_1 + \omega_2 - m)^2}{\omega_1^2 \omega_2^2} d\omega_1 d\omega_2.$$

Стоящий здесь двойной интеграл равен $(\pi^2 - 9)/3$, и мы приходим к приведенной выше формуле (89,6).

§ 90. Магнитотормозное излучение

Согласно классической теории (см. II, § 74) ультрарелятивистский электрон, движущийся в постоянном магнитном поле \mathbf{H} , излучает квазинепрерывный спектр с максимумом, приходящимся на частоту

$$\omega \sim \omega_0 \left(\frac{\varepsilon}{m} \right)^3, \quad (90,1)$$