с заданными энергиями в виде

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{1}{6}\frac{8e^6}{vm^2}\left\{\left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_2}{\omega_1\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2\right\} d\omega_1\, d\omega_2 \tag{89,14}$$

(имея в виду дальнейшее интегрирование по частотам, мы ввели сюда множитель $^1/_6$, учитывающий тождественность фотонов — ср. примеч. на с. 287).

Каждая из частот ω_1, ω_2, ω_3 может пробегать значения между 0 и m (значение m достигается двумя частотами, когда третья равна нулю). При заданном ω_1 частота ω_2 меняется между $m-\omega_1$ и m. Интегрируя (89,14) по ω_2 в этих пределах, получаем спектральное распределение фотонов распада:

$$d\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{8e^6}{3vm^3} F(\omega_1)\, d\omega_1,$$

$$F(\omega_1) = \frac{\omega_1(m-\omega_1)}{(2m-\omega_1)^2} + \frac{2m-\omega_1}{\omega_1} + \left[\frac{2m(m-\omega_1)}{\omega_1^2} - \frac{2m(m-\omega_1)^2}{(2m-\omega_1)^3}\right]\ln\frac{m-\omega_1}{m}.$$

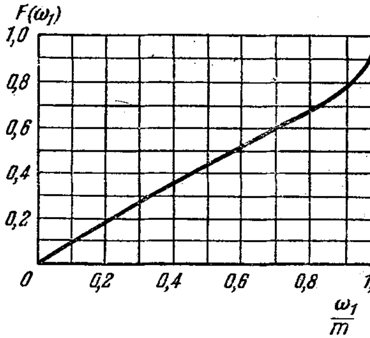

Рис. 14

Функция $F(\omega_1)$ монотонно возрастает от нуля при $\omega_1 = 0$ до 1 при $\omega_1 = m$; на рис. 14 изображен ее график.

Полное сечение аннигиляции получается интегрированием (89,14) по обеим частотам:

$$\bar{\sigma}_{3\gamma} = \frac{4e^6}{3vm^2}\, 3\int_0^m \int_{m-\omega_1}^m \frac{(\omega_1+\omega_2-m)^2}{\omega_1^2\omega_2^2}\, d\omega_1\, d\omega_2.$$

Стоящий здесь двойной интеграл равен $(\pi^2 - 9)/3$, и мы приходим к приведенной выше формуле (89,6).

§ 90. Магнитотормозное излучение

Согласно классической теории (см. II, § 74) ультрарелятивистский электрон, движущийся в постоянном магнитном поле **H**, излучает квазинепрерывный спектр с максимумом, приходящимся на частоту

$$\omega \sim \omega_0\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^3, \tag{90,1}$$

где

$$\omega_0 = \frac{v|e|H}{|\mathbf{p}|} \approx \frac{|e|H}{\varepsilon} \tag{90,2}$$

— частота обращения электрона с энергией ε по круговой орбите (в плоскости, перпендикулярной полю)[1]. Будем считать, что продольная (вдоль $\mathbf{H}$) составляющая скорости электрона равна нулю; этого всегда можно добиться надлежащим выбором системы отсчета.

Квантовые эффекты в магнитотормозном излучении имеют двоякое происхождение: квантование движения электрона и квантовая отдача при испускании фотона. Последняя определяется отношением $\hbar\omega/\varepsilon$, и условие применимости классической теории требует его малости. В этой связи удобно ввести параметр

$$\chi = \frac{H}{H_0}\frac{|\mathbf{p}|}{m} \approx \frac{H\varepsilon}{H_0 m} \approx \frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^3, \tag{90,3}$$

где $H_0 = m^2/|e|\hbar \, (= m^2c^3/|e|\hbar) = 4{,}4\cdot 10^{13}$ Гс. В классической области $\chi \sim \hbar\omega/\varepsilon \ll 1$. В случае $\chi \gtrsim 1$ энергия излученного фотона $\hbar\omega \sim \varepsilon$, причем при $\chi \gg 1$ (как мы увидим в дальнейшем) существенная область спектра простирается до частот, при которых энергия электрона после испускания

$$\varepsilon' \sim m\frac{H_0}{H} \ll \varepsilon. \tag{90,4}$$

Для того чтобы электрон оставался ультрарелятивистским, поле должно удовлетворять условию

$$\frac{H}{H_0} \ll 1. \tag{90,5}$$

Что касается квантования самого движения электрона, то оно характеризуется отношением $\hbar\omega_0/\varepsilon$; $\hbar\omega_0$ есть расстояние между соседними уровнями энергии при движении в магнитном поле. Поскольку

$$\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon} = \frac{H}{H_0}\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2,$$

ввиду (90,5) заведомо $\hbar\omega_0 \ll \varepsilon$, т. е. движение электрона квазиклассично вне зависимости от значения χ. Другими словами, можно пренебречь некоммутативностью операторов динамических переменных электрона друг с другом (величины $\approx \hbar\omega_0/\varepsilon$),

[1]) В этом параграфе полагаем $c = 1$, но сохраняем множители $\hbar$.

учитывая в то же время их некоммутативность с операторами фотонного поля (величины $\sim\hbar\omega/\varepsilon$)[1]).

Квазиклассические волновые функции стационарных состояний электрона во внешнем поле могут быть представлены в символическом виде

$$\psi = (2\hat{H})^{-1/2} u(\hat{p}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\varphi(\mathbf{r}), \tag{90,6}$$

где $\varphi(\mathbf{r}) \sim \exp(iS/\hbar)$ — квазиклассические волновые функции бесспиновой частицы ($S(\mathbf{r})$ — ее классическое действие); $u(\hat{p})$ — операторный биспинор

$$u(\hat{p}) = \begin{pmatrix} (\hat{H}+m)^{1/2} w \\ (\hat{H}+m)^{-1/2} (\sigma\hat{\mathbf{p}}) w \end{pmatrix},$$

получающийся из биспинорной амплитуды плоской волны $u(p)$ (23,9) заменой $\mathbf{p}$ и ε операторами[2])

$$\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{P}} - e\mathbf{A} = -i\hbar\nabla - e\mathbf{A}, \quad \hat{H} = (\hat{\mathbf{p}}^2 + m^2)^{1/2},$$

$\mathbf{P}$ — обобщенный импульс частицы в поле с векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$; порядок, в котором стоят операторные множители в ψ, несуществен, поскольку их некоммутативностью мы пренебрегаем; спиновое состояние электрона определяется 3-спинором w.

Для вычисления вероятности излучения фотона в квазиклассическом случае удобнее исходить не из окончательной формулы теории возмущений (44,3), а из формулы, в которой еще не произведено интегрирование по времени. Для полной (за все время) дифференциальной вероятности имеем[3])

$$dw = \sum_f |a_{fi}|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad a_{fi} = \int_{-\infty}^{\infty} V_{fi}(t)\,dt \tag{90,7}$$

---

[1]) Полное решение квантовой задачи о магнитотормозном излучении было дано *Н. П. Клепиковым* (1954), а первая квантовая поправка к классической формуле — *А. А. Соколовым, Н. П. Клепиковым* и *И. М. Терновым* (1952). Излагаемый в этом параграфе вывод, использующий явным образом квазиклассичность движения, принадлежит *В. Н. Байеру* и *В. М. Каткову* (1967). Аналогичный метод был использован ранее *Швингером* (*J. Schwinger*, 1954) для получения первой квантовой поправки в интенсивности излучения.

[2]) В этом параграфе (в отличие от гл. IV) обобщенный импульс обозначается прописной буквой $\mathbf{P}$; обозначение же $\mathbf{p}$ применяется для обычного (кинетического) импульса.

[3]) Подставив

$$V_{fi}(t) = V_{fi} \exp(i\omega_{fi} t),$$

получим $a_{fi} = 2\pi V_{fi}\delta(\omega_{fi})$. Учитывая, что квадрат δ-функции надо понимать как

$$[\delta(\omega)]^2 \to (t/2\pi)\,\delta(\omega),$$

где t — полное время наблюдения (ср. вывод (64,5)), получаем из (90,7) для вероятности в единицу времени формулу (44,3).

(ср. III (41,2)); суммирование производится по конечным состояниям электрона.

Использовав (90,6), запишем матричный элемент для испускания фотона ω, $\mathbf{k}$ в операторном виде

$$V_{fi}(t) = -\frac{e\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\hbar\omega}} \times$$

$$\times \int \left[\varphi_f^* \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\frac{u^+(\hat{p})}{(2\hat{H})^{1/2}}\right] e^{i\omega t - i\mathbf{kr}} (\mathbf{e}^*\boldsymbol{\alpha}) \frac{u(\hat{p})}{(2\hat{H})^{1/2}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\varphi_i\, d^3x,$$

где в квадратных скобках операторы действуют налево; поле фотона выбрано в трехмерно поперечной калибровке. Множители $\exp(\pm i\hat{H}t/\hbar)$ превращают стоящие между ними шредингеровские операторы в зависящие явно от времени операторы гейзенберговского представления. Запишем $V_{fi}(t)$ в виде

$$V_{fi}(t) = e\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}\,\langle f\,|\,Q(t)\,|\,i\rangle e^{i\omega t},$$

где $\hat{Q}(t)$ обозначает гейзенберговский оператор

$$\hat{Q}(t) = \frac{u_f^+(\hat{p})}{(2\hat{H})^{1/2}}(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}^*)\, e^{-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}(t)}\frac{u_i(\hat{p})}{(2\hat{H})^{1/2}}, \qquad (90,8)$$

а матричный элемент берется по отношению к функциям φ_f, φ_i.

Суммирование в (90,7) производится по всем конечным волновым функциям φ_f; оно осуществляется с помощью равенства

$$\sum_f \varphi_f^*(\mathbf{r}')\,\varphi_f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}),$$

выражающего полноту системы функций φ_f. В результате получим

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega}\frac{d^3k}{4\pi^2}\int dt_1 \int dt_2 \cdot e^{i\omega(t_1 - t_2)}\langle i\,|\,Q^+(t_2)\,Q(t_1)\,|\,i\rangle. \qquad (90,9)$$

Если интегрирование производится по достаточно большому промежутку времени, можно ввести вместо t_1, t_2 новые переменные

$$\tau = t_2 - t_1, \qquad t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

и в интеграле по dt рассматривать подынтегральное выражение как вероятность испускания в единицу времени. Умножив ее на $\hbar\omega$, получим интенсивность

$$dI = \frac{e^2}{4\pi^2}\,d^3k \int e^{-i\omega\tau}\langle i\,|\,Q^+\left(t + \frac{\tau}{2}\right)Q\left(t - \frac{\tau}{2}\right)|\,i\rangle\,d\tau. \qquad (90,10)$$

Ультрарелятивистский электрон излучает в узкий конус под углами $\theta \sim m/\varepsilon$ относительно его скорости $\mathbf{v}$. Поэтому излучение в заданном направлении $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ формируется на участке траектории, на котором $\mathbf{v}$ поворачивается на угол $\sim m/\varepsilon$. Этот участок проходится за время τ такое, что $\tau|\dot{\mathbf{v}}| \approx \tau\omega_0 \sim m/\varepsilon \ll 1$. Именно эта область даст основной вклад в интеграл по τ. Поэтому в дальнейших вычислениях мы будем систематически разлагать все величины по степеням $\omega_0\tau$. При этом, однако, может оказаться необходимым сохранять более чем один старший член разложения ввиду сокращений, происходящих из-за того, что $1 - \mathbf{nv} \sim \theta^2 \sim (m/\varepsilon)^2$.

Если привести оператор $\hat{Q}^+\hat{Q}$ к виду произведения коммутативных (с требуемой точностью) операторов, то взятие диагонального матричного элемента $\langle i|\ldots|i\rangle$ сведется к замене этих операторов классическими значениями (функциями времени) соответствующих величин. Эта цель достигается следующим образом.

Согласно сказанному выше, в выражении для $\hat{Q}(t)$ надо учитывать некоммутативность электронных операторов лишь с оператором $\exp[-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}(t)]$, связанным с фотонным полем. Имеем

$$\begin{gathered}\hat{\mathbf{p}}\exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}) = \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{p}} - \hbar\mathbf{k}),\\ H(\hat{\mathbf{p}})\exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}) = \exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})H(\hat{\mathbf{p}} - \hbar\mathbf{k}).\end{gathered} \tag{90,11}$$

Эти формулы — следствие того, что $\exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}})$ есть оператор сдвига в импульсном пространстве. С помощью (90,11) выносим в (90,8) оператор $\exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}(t))$ налево и записываем $\hat{Q}(t)$ в виде

$$\hat{Q}(t) = \exp[-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}(t)]\hat{R}(t), \quad \hat{R}(t) = \frac{u_f^+(\hat{p}')}{(2\hat{H}')^{1/2}}(\alpha\mathbf{e}^*)\frac{u_i(\hat{p})}{(2\hat{H})^{1/2}}, \tag{90,12}$$

где $\hat{H}' = \hat{H} - \hbar\omega$, $\hat{\mathbf{p}}' = \hat{\mathbf{p}} - \hbar\mathbf{k}$.

Теперь

$$\hat{Q}_2^+\hat{Q}_1 = \hat{R}_2\exp(i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_2)\exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_1)\hat{R}_1 \tag{90,13}$$

(здесь и ниже индексы 1 и 2 отмечают значения величины в моменты времени $t_1 = t - \tau/2$ и $t_2 = t + \tau/2$). Остается вычислить произведение двух некоммутативных операторов $\exp(i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_2)$ и $\exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_1)$. Само это произведение уже можно считать коммутативным с остальными множителями.

Обозначим

$$\hat{L}(\tau) = \exp(-i\omega\tau)\exp(i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_2)\exp(-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_1); \tag{90,14}$$

именно эта комбинация операторов входит в (90,10). По смыслу оператора $\exp(i\hat{H}\tau/\hbar)$ как оператора сдвига по времени имеем

$$\exp(i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_2) = \exp\left(i\hat{H}\frac{\tau}{\hbar}\right)\exp(i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_1)\exp\left(-i\hat{H}\frac{\tau}{\hbar}\right).$$

Подставив это выражение в (90,14) и учтя, что $\exp(i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_1)$ есть оператор сдвига в импульсном пространстве, преобразуем L к виду

$$\hat{L}(\tau) = \exp\left\{i[\hat{H} - \hbar\omega]\frac{\tau}{\hbar}\right\}\exp\left\{-i\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}_1 - \hbar\mathbf{k})\frac{\tau}{\hbar}\right\}. \quad (90,15)$$

Продифференцировав (90,15) по τ и снова использовав свойства оператора сдвига по времени, запишем[1])

$$\frac{d\hat{L}}{d\tau} = \frac{i}{\hbar}\exp\left\{i(\hat{H} - \hbar\omega)\frac{\tau}{\hbar}\right\}[\hat{H} - \hbar\omega - \hat{H}(\hat{\mathbf{p}}_1 - \hbar\mathbf{k})] \times$$
$$\times \exp\left\{-i\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}_1 - \hbar\mathbf{k})\frac{\tau}{\hbar}\right\} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H} - \hbar\omega - \hat{H}(\hat{\mathbf{p}}_2 - \hbar\mathbf{k})]\hat{L}(\tau). \quad (90,16)$$

После того как некоммутативность операторов таким образом использована, можно заменить все операторы соответствующими классическими величинами (в том числе гамильтониан $\hat{H}$ энергией электрона ε). Имеем тождественно

$$\varepsilon(\mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k}) = [(\mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k})^2 + m^2]^{1/2} = [(\varepsilon - \hbar\omega)^2 + 2\hbar(\omega\varepsilon - \mathbf{k}\mathbf{p}_2)]^{1/2}.$$

Разность

$$\omega\varepsilon - \mathbf{k}\mathbf{p}_2 = \omega\varepsilon(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_2)$$

мала, поскольку, согласно сказанному выше, $1 - \mathbf{v}\mathbf{n} \sim (m/\varepsilon)^2$. С точностью до первого порядка по этой разности имеем

$$\varepsilon(\mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k}) \approx \varepsilon' + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\hbar(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_2),$$

где $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$. Из (90,16) находим теперь дифференциальное уравнение для функции $L(\tau)$:

$$i\hbar\frac{dL}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\hbar(\omega - \mathbf{v}_2\mathbf{k})L. \quad (90,17)$$

[1]) В силу сохранения энергии гейзенберговские операторы $\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}_1)$ и $\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}_2)$ совпадают, поэтому в таких случаях аргумент у $\hat{H}$ не пишем. Но, конечно, $\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}_1 - \hbar\mathbf{k})$ отнюдь не совпадает с $\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}_2 - \hbar\mathbf{k})$.

Это уравнение должно решаться с очевидным начальным условием $L(0)=1$. Заметив, что

$$\int_0^\tau \mathbf{v}_2 d\tau = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$$

получим

$$L(\tau) = \exp\left\{i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\mathbf{k}\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}\mathbf{r}_1 - \omega\tau)\right\}. \qquad (90,18)$$

До сих пор мы не использовали конкретного вида траектории электрона. Выразим теперь $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ в (90,18) через $\mathbf{p}_1$ с помощью уравнения движения электрона в плоскости, перпендикулярной полю $\mathbf{H}$ (см. II, § 21):

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{eH}\sin\frac{eH\tau}{\varepsilon} + \frac{[\mathbf{p}_1\mathbf{H}]}{eH^2}\left(1-\cos\frac{eH\tau}{\varepsilon}\right).$$

Разлагая по степеням τ, имеем отсюда

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) - \omega\tau \approx \omega\tau\left\{(\mathbf{v}_1\mathbf{n}-1) + \tau\frac{e\mathbf{n}[\mathbf{p}_1\mathbf{H}]}{2\varepsilon^2} - \tau^2\frac{e^2H^2}{6\varepsilon^2}\right\} \qquad (90,19)$$

(в последнем члене положено $\mathbf{n}\mathbf{v}_1 \approx 1$).

Преобразуем остальные множители в (90,13). Прямым раскрытием произведения в $R(t)$ (с матрицей α из (21,20)) находим

$$\begin{gathered} R(t) = w_f^* \mathbf{e}^* (A + i[\mathbf{B}\sigma])\, w_i, \\ \mathbf{A} = \frac{\mathbf{p}}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon'}\right) = \frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2\varepsilon'}\mathbf{v}, \\ \mathbf{B} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{p}}{\varepsilon+m} - \frac{\mathbf{p}'}{\varepsilon'+m}\right) \approx \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon'}\left(\mathbf{n}-\mathbf{v}+\mathbf{v}\frac{m}{\varepsilon}\right), \end{gathered} \qquad (90,20)$$

где $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t) - \hbar\mathbf{k}$; опущены члены высших порядков по m/ε. Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{gathered} \exp(-i\omega t)\langle i|Q_2^+Q_1|i\rangle = R_2^* R_1 L(\tau), \\ R_2^*R_1 = \mathrm{Sp}\,\frac{1+\zeta_i\sigma}{2}((\mathbf{A}_2 - i[\mathbf{B}_2\sigma])\,\mathbf{e})\,\frac{1+\zeta_f\sigma}{2}((\mathbf{A}_1 + i[\mathbf{B}_1\sigma])\,\mathbf{e}^*). \end{gathered} \qquad (90,21)$$

Множители $(1+\zeta\sigma)/2$ — двухрядные поляризационные матрицы плотности начального и конечного электронов.

Рассмотрим интенсивность излучения, просуммированную по поляризациям фотона и конечного электрона и усредненную по поляризациям начального электрона. В результате указанных операций получим после простого вычисления [1])

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{поляр}} R_2^* R_1 = \frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{2\varepsilon'^2}(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon'}\right)^2\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2.$$

С требуемой точностью

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}^2 - \frac{\tau^2}{4}\dot{\mathbf{v}}^2 + \frac{\tau^2}{4}\mathbf{v}\ddot{\mathbf{v}} = 1 - \frac{m^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\omega_0^2\tau^2.$$

Подставив эти выражения в (90,21), а затем в (90,10), получим

$$dI = -\frac{e^2}{4\pi^2}\omega^2 d\omega\, do_{\mathbf{n}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m^2}{\varepsilon\varepsilon'} + \frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{4\varepsilon'^2}\omega_0^2\tau^2\right)\exp\left\{-\frac{i\omega\tau\varepsilon}{\varepsilon'}\left(1-\mathbf{n}\mathbf{v}+\frac{\tau^2}{24}\omega_0^2\right)\right\}d\tau. \tag{90,22}$$

Эта формула дает спектральное и угловое распределение интенсивности излучения.

Для нахождения спектрального распределения произведем интегрирование по $do_{\mathbf{n}}$. Выбирая направление $\mathbf{v}$ в качестве полярной оси с углом ϑ между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$, имеем

$$\mathbf{n}\mathbf{v} = v\cos\vartheta, \quad do_{\mathbf{n}} = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

и интеграл

$$\int \exp\left(\frac{i\omega\tau\varepsilon}{\varepsilon'}\mathbf{n}\mathbf{v}\right)do_{\mathbf{n}} = \frac{2\pi\varepsilon'}{i\omega\tau\varepsilon v}\left\{\exp\left(\frac{i\omega\tau\varepsilon v}{\varepsilon'}\right) - \exp\left(-\frac{i\omega\tau\varepsilon v}{\varepsilon'}\right)\right\}.$$

При подстановке этого выражения в (90,22) мы получим два члена, показатели экспонент которых имеют разный порядок величины. Показатель экспоненты второго члена оказывается гораздо большим, поскольку содержит множитель $1+v\approx 2$ вместо малого множителя $1-v\approx m^2/2\varepsilon^2$ в первом члене. Сместив контур интегрирования по τ в нижнюю полуплоскость комплексного переменного τ, можно сделать второй член ма-

---

[1]) Здесь использовано также следующее обстоятельство. При суммировании по $\mathbf{e}$:

$$\sum_{\mathbf{e}}(\mathbf{v}_1\mathbf{e})(\mathbf{v}_2\mathbf{e}^*) = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1\mathbf{n})(\mathbf{v}_2\mathbf{n}).$$

Но при подстановке (90,21) в (90,10) можно произвести интегрирование по частям, заметив, что

$$(\mathbf{v}_1\mathbf{n})\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\varepsilon'}\mathbf{k}\mathbf{r}_1\right) = \frac{i\varepsilon'}{\varepsilon\omega}\frac{d}{dt_1}\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\varepsilon'}\mathbf{k}\mathbf{r}_1\right)$$

и аналогично для $\mathbf{v}_2\mathbf{n}$. В результате найдем, что для дальнейшего интегрирования $\mathbf{v}_1\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}_2\mathbf{n}$ можно заменить здесь единицей.

лым и пренебречь им. После этого можно снова совместить контур интегрирования с вещественной осью. Из вывода видно, однако, что имеющийся теперь полюс в подынтегральном выражении при $\tau=0$ должен обходиться снизу. Таким образом,

$$\frac{dI}{d\omega}=\frac{ie^2\omega}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m^2}{\varepsilon^2\tau}+\frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{4\varepsilon\varepsilon'}\omega_0^2\tau\right)\exp\left\{-\frac{i\omega\tau\varepsilon}{\varepsilon'}\left(1-v+\frac{\tau^2}{24}\omega_0^2\right)\right\}d\tau,$$

причем контур интегрирования выбирается указанным выше способом. Используя интегральное представление функции Эйри Φ (см. III, § b), нетрудно показать, что первый член сводится к интегралу от функции Эйри, а второй — к производной от нее. Окончательно находим

$$\frac{dI}{d\omega}=-\frac{e^2m^2\omega}{\sqrt{\pi}\varepsilon^2}\left\{\int\limits_x^{\infty}\Phi(\xi)\,d\xi+\left(\frac{2}{x}+\frac{\hbar\omega}{\varepsilon}\chi x^{1/2}\right)\Phi'(x)\right\}, \qquad (90,23)$$

$$x=\left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon'\chi}\right)^{2/3}=\frac{m^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{\varepsilon\omega}{\varepsilon'\omega_0}\right)^{2/3} \qquad (90,24)$$

(*А. И. Никишов, В. И. Ритус*, 1967). Максимум в частотном распределении лежит при $x\sim 1$; при $\chi\ll 1$ отсюда следует (90,1), а при $\chi\gg 1$ — (90,4). В классическом предельном случае имеем $\hbar\omega\ll\varepsilon$, так что $\varepsilon'\approx\varepsilon$, $x\approx(\omega/\omega_0)^{2/3}(m/\varepsilon)^2$; второй член в круглых скобках мал и (90,23) переходит в классическую формулу II (74,13).

На рис. 15 изображены графики спектрального распределения при различных значениях χ. Отложена величина

$$\frac{1}{{}^3/_2 I_{\text{кл}}}\,\frac{dI}{d(\omega/\omega_c)}$$

как функция отношения ω/ω_c, где

$$\hbar\omega_c=\frac{\varepsilon\chi}{{}^2/_3+\chi},\qquad I_{\text{кл}}=\frac{2e^2m^2\chi^2}{3\hbar^2}=\frac{2e^4H^2\varepsilon^2}{3m^4}.$$

Величина $I_{\text{кл}}$ есть классическая полная интенсивность излучения (ср. II (74,2)).

Для вычисления полной интенсивности излучения выражение (90,23) надо проинтегрировать по ω от 0 до ε. Перейдем к интегрированию по x, заметив, что

$$\hbar\omega=\varepsilon\left(1-\frac{1}{1+\chi x^{3/2}}\right),$$

а следовательно, x меняется от 0 до ∞. Произведя в первом члене в (90,23) дважды интегрирование по частям, получим

$$I = -\frac{e^2 m^2 \chi^2}{2\sqrt{\pi}\hbar^2}\int\limits_0^\infty \frac{4+5\chi x^{3/2}+4\chi^2 x^3}{(1+\chi x^{3/2})^4}\Phi'(x)\,x\,dx. \qquad (90,25)$$

На рис. 16 изображен график функции $I(\chi)/I_{\text{кл}}$.

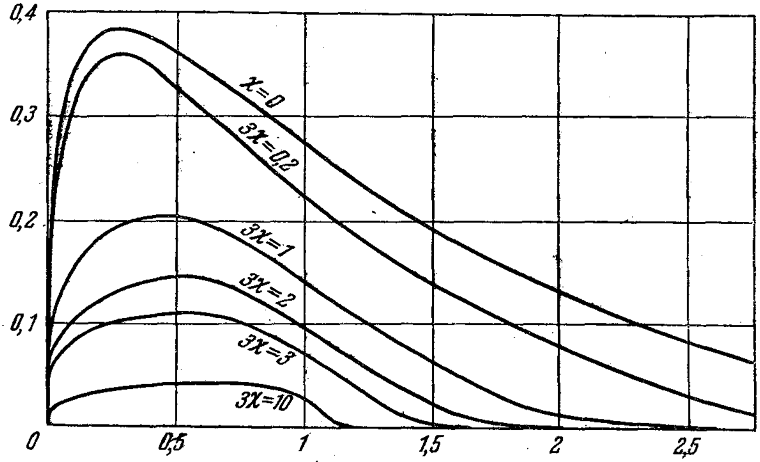

Рис. 15

При $\chi \ll 1$ в интеграле существенна область $x \sim 1$. Разлагая подынтегральное выражение по χ и интегрируя это разложение с помощью формулы

$$\int\limits_0^\infty x^\nu \Phi'(x)\,dx = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}3^{(4\nu-1)/6}\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{\nu}{3}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{3}+\frac{1}{3}\right),$$

получаем

$$I = I_{\text{кл}}\left(1-\frac{55\sqrt{3}}{16}\chi+48\chi^2-\dots\right). \qquad (90,26)$$

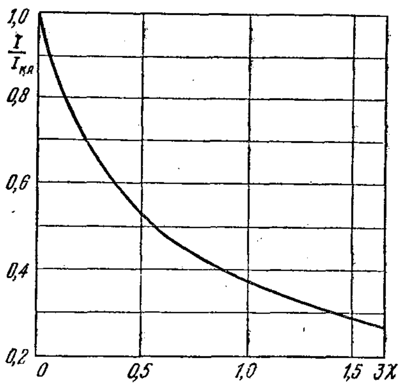

Рис. 16

При $\chi \gg 1$ в интеграле существенна область, в которой $\chi x^{3/2} \sim 1$, т. е. $x \ll 1$. В первом приближении можно поэтому заменить $\Phi'(x)$ на $\Phi'(0) = -3^{1/6}\Gamma(2/3)/2\sqrt{\pi}$, после чего интегрирование дает

$$I \approx \frac{32\Gamma(2/3)\,e^2 m^2}{243\hbar^2}(3\chi)^{2/3} = 0{,}37\frac{e^2 m^2}{\hbar^2}\left(\frac{H\varepsilon}{H_0 m}\right)^{2/3}. \qquad (90,27)$$

Магнитотормозное излучение приводит к возникновению поляризации движущихся электронов (*А. А. Соколов, И. М. Тернов*, 1963). Для рассмотрения этого вопроса надо найти вероятность радиационного перехода с обращением направления спина.

Положив в (90,21) $\zeta_i = -\zeta_f \equiv \zeta$, $|\zeta| = 1$, получим

$$R_2^* R_1 = (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2) - (\mathbf{e}^*\mathbf{B}_1)(\mathbf{e}\mathbf{B}_2) - (\mathbf{e}^*[\mathbf{B}_1\zeta])(\mathbf{e}[\mathbf{B}_2\zeta]) - i(\zeta\mathbf{e}^*)(\mathbf{e}[\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2]).$$

Суммирование по поляризациям фотона дает после простых преобразований

$$\sum_{\mathbf{e}} R_2^* R_1 = (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)(1 - (\zeta\mathbf{n})^2) + (\zeta\mathbf{n})(\mathbf{n}\mathbf{B}_1)(\zeta\mathbf{B}_2) + \\ + (\zeta\mathbf{n})(\mathbf{n}\mathbf{B}_2)(\zeta\mathbf{B}_1) - i(\zeta - \mathbf{n}(\mathbf{n}\zeta))[\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2]. \tag{90,28}$$

Будем предполагать, что $\chi \ll 1$, и будем искать лишь главный член разложения вероятности по степеням $\hbar$. Поскольку выражение (90,28) (с **B** из (90,20)) уже содержит $\hbar^2$, все остающиеся (в том числе в показателе экспоненты в (90,18)) величины ε' можно заменить на ε.

Разложив

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\omega}{2\varepsilon}\left(\mathbf{n} - \mathbf{v} + \frac{\tau}{2}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v}\frac{m}{\varepsilon}\right),$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\omega}{2\varepsilon}\left(\mathbf{n} - \mathbf{v} - \frac{\tau}{2}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v}\frac{m}{\varepsilon}\right),$$

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \tau\mathbf{v} + \frac{\tau^3}{24}\ddot{\mathbf{v}}$$

и подставив (90,28) в (90,21) и затем в (90,10), найдем дифференциальную вероятность перехода в единицу времени ($dw = dI/\hbar\omega$). Она интегрируется с помощью формулы

$$\int f(k_\mu) e^{-ikx}\frac{d^3k}{\omega} = -f(i\partial_\mu)\frac{4\pi}{(x_0 - i0)^2 - \mathbf{x}^2}, \tag{90,29}$$

где в данном случае

$$x_0 = \tau, \quad \mathbf{x} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2 = \tau^2\left(\frac{m^2}{\varepsilon^2} + \frac{\tau^2\omega_0^2}{12}\right).$$

Вычисление приводит к результату

$$w = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\hbar^2}{m^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^5 \omega_0^3 \oint \frac{dz}{(1 + z^2/12)^3} \times \\ \times \left[\frac{3}{z^4} - \frac{5}{12z^2} + \left(\frac{1}{z^4} + \frac{5}{12z^2}\right)(\zeta\mathbf{v})^2 - \frac{2i}{z^3\omega_0}(\zeta[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v}])\right],$$

где сделана замена: $z = \tau\omega_0\varepsilon/m$, а контур интегрирования по z проходит ниже вещественной оси и замыкается в нижней полуплоскости. Выполнив это последнее интегрирование, получим окончательно полную вероятность радиационного перехода с обращением спина:

$$w = \frac{5\sqrt{3}\alpha}{16}\frac{\hbar^2}{m^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^5\omega_0^3\left(1 - \frac{2}{9}\zeta_\parallel^2 - \frac{8\sqrt{3}}{15}\frac{e}{|e|}\zeta_\perp\right), \quad (90,30)$$

где $\zeta_\parallel = \zeta\mathbf{v}$, $\zeta_\perp = \zeta\mathbf{H}/H$. Эта формула пригодна как для электронов ($e < 0$), так и для позитронов ($e > 0$).

Вероятность (90,30) не зависит от знака продольной поляризации $\zeta_\parallel$, но зависит от знака $\zeta_\perp$. Поэтому и возникающая в результате излучения поляризация поперечна[1]). Для электронов вероятность перехода из состояния со спином «по полю» ($\zeta_\perp = 1$) в состоянии со спином «против поля» больше вероятности обратного перехода. Поэтому радиационная поляризация электронов направлена против поля, а ее степень в стационарном состоянии равна (при $\zeta_\parallel = 0$)

$$\frac{w(\zeta_\perp = -1) - w(\zeta_\perp = 1)}{w(\zeta_\perp = -1) + w(\zeta_\perp = 1)} = \frac{8\sqrt{3}}{15} = 0{,}92.$$

Позитроны поляризуются (с такой же степенью) в направлении по полю.

§ 91. Образование пар фотоном в магнитном поле

Образование электрон-позитронной пары фотоном в магнитном поле и магнитотормозное излучение — два перекрестных канала одной и той же реакции. Поэтому амплитуда M_{fi} процесса образования пары получается из амплитуды тормозного излучения просто путем замены

$$\varepsilon,\ \mathbf{p} \to -\varepsilon_+,\ -\mathbf{p}_+;\quad \varepsilon',\ \mathbf{p}' \to \varepsilon_-,\ \mathbf{p}_-;\quad \omega,\ \mathbf{k} \to -\omega,\ -\mathbf{k} \quad (91,1)$$

(здесь ε_-, $\mathbf{p}_-$ и ε_+, $\mathbf{p}_+$ — энергии и импульсы электрона и позитрона в паре; ε, $\mathbf{p}$ и ε', $\mathbf{p}'$ — начальные и конечные энергии и импульсы электрона при тормозном излучении). В терминах углов и абсолютных значений преобразование импульсов есть

$$|\mathbf{p}| \to |\mathbf{p}_+|,\ |\mathbf{p}'| \to |\mathbf{p}_-|,\ \theta \to \pi - \theta_+,\ \theta' \to \theta_-,\ \varphi \to \varphi - \pi, \quad (91,2)$$

где $\theta_\pm$ — углы между $\mathbf{p}_\pm$ и $\mathbf{k}$, φ — угол между плоскостями $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}_+$ и $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}_-$.

[1]) Это обстоятельство, впрочем, ясно заранее: аксиальный вектор возникающей поляризации может быть направлен лишь вдоль единственного фигурирующего в задаче аксиального вектора **H**.