плоскости. Выполнив это последнее интегрирование, получим окончательно полную вероятность радиационного перехода с обращением спина:

$$w = \frac{5\sqrt{3}\alpha}{16}\frac{\hbar^2}{m^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^5 \omega_0^3\left(1 - \frac{2}{9}\zeta_\parallel^2 - \frac{8\sqrt{3}}{15}\frac{e}{|e|}\zeta_\perp\right), \qquad (90{,}30)$$

где $\zeta_\parallel = \zeta\mathbf{v}$, $\zeta_\perp = \zeta\mathbf{H}/H$. Эта формула пригодна как для электронов ($e < 0$), так и для позитронов ($e > 0$).

Вероятность (90,30) не зависит от знака продольной поляризации $\zeta_\parallel$, но зависит от знака $\zeta_\perp$. Поэтому и возникающая в результате излучения поляризация поперечна[1]). Для электронов вероятность перехода из состояния со спином «по полю» ($\zeta_\perp = 1$) в состоянии со спином «против поля» больше вероятности обратного перехода. Поэтому радиационная поляризация электронов направлена против поля, а ее степень в стационарном состоянии равна (при $\zeta_\parallel = 0$)

$$\frac{w(\zeta_\perp = -1) - w(\zeta_\perp = 1)}{w(\zeta_\perp = -1) + w(\zeta_\perp = 1)} = \frac{8\sqrt{3}}{15} = 0{,}92.$$

Позитроны поляризуются (с такой же степенью) в направлении по полю.

§ 91. Образование пар фотоном в магнитном поле

Образование электрон-позитронной пары фотоном в магнитном поле и магнитотормозное излучение — два перекрестных канала одной и той же реакции. Поэтому амплитуда M_{fi} процесса образования пары получается из амплитуды тормозного излучения просто путем замены

$$\varepsilon,\ \mathbf{p} \to -\varepsilon_+,\ -\mathbf{p}_+;\quad \varepsilon',\ \mathbf{p}' \to \varepsilon_-,\ \mathbf{p}_-;\quad \omega,\ \mathbf{k} \to -\omega,\ -\mathbf{k} \qquad (91{,}1)$$

(здесь ε_-, $\mathbf{p}_-$ и ε_+, $\mathbf{p}_+$ — энергии и импульсы электрона и позитрона в паре; ε, $\mathbf{p}$ и ε', $\mathbf{p}'$ — начальные и конечные энергии и импульсы электрона при тормозном излучении). В терминах углов и абсолютных значений преобразование импульсов есть

$$|\mathbf{p}| \to |\mathbf{p}_+|,\ |\mathbf{p}'| \to |\mathbf{p}_-|,\ \theta \to \pi - \theta_+,\ \theta' \to \theta_-,\ \varphi \to \varphi - \pi, \qquad (91{,}2)$$

где $\theta_\pm$ — углы между $\mathbf{p}_\pm$ и $\mathbf{k}$, φ — угол между плоскостями $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}_+$ и $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}_-$.

---

[1]) Это обстоятельство, впрочем, ясно заранее: аксиальный вектор возникающей поляризации может быть направлен лишь вдоль единственного фигурирующего в задаче аксиального вектора $\mathbf{H}$.

В случае тормозного излучения сечение процесса выражается через амплитуду формулой [1])

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{8|\mathbf{p}|\varepsilon'\omega} \delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega) \frac{d^3p' d^3k}{(2\pi)^5} \tag{91,3}$$

(см. (64,25)); δ-функция устраняется интегрированием по ε'. Помня, что в данном случае $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{k}$ — независимые переменные, и замечая, что

$$d^3p' = |\mathbf{p}'|\varepsilon' d\varepsilon' do', \quad d^3k = \omega^2 d\omega do_{\mathbf{k}},$$

надо просто заменить

$$\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega) d^3p' d^3k \to \omega^2 |\mathbf{p}'| \varepsilon' do_{\mathbf{k}} do' d\omega.$$

Тогда

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{\omega |\mathbf{p}'|}{8(2\pi)^5 |\mathbf{p}|} do_{\mathbf{k}} do' d\omega. \tag{91,4}$$

В случае же образования пары фотоном сечение выражается через амплитуду согласно

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{8\omega\varepsilon_-\varepsilon_+} \delta(\omega - \varepsilon_+ - \varepsilon_-) \frac{d^3p_+ d^3p_-}{(2\pi)^5}$$

или, после исключения δ-функции:

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{p}_+||\mathbf{p}_-|}{8(2\pi)^5\omega} do_+ do_- d\varepsilon_+. \tag{91,5}$$

Сравнив с (91,4), мы увидим, что для получения сечения образования пары из сечения тормозного излучения надо произвести в последнем замену (91,1), умножить его на

$$\frac{\mathbf{p}_+^2}{\omega^2} \frac{d\varepsilon_+}{d\omega} \tag{91,6}$$

и заменить $do' do_{\mathbf{k}}$ на $do_+ do_-$.

В ультрарелятивистском случае ($\omega \gg m$)[2]) это можно сделать в формулах, полученных в предыдущем параграфе. При этом предполагается, что обе частицы пары являются ультрарелятивистскими; легко проследить, что в таком случае остаются справедливыми все использованные в § 90 приближения.

В частности, вероятность рождения пары неполяризованным фотоном, просуммированную по проекциям спина электрона и позитрона и проинтегрированную по направлениям вылета электрона, получим, произведя замену (91,1) в формуле (90,22)

[1]) В этом параграфе снова полагаем не только $c = 1$, но и $\hbar = 1$.

[2]) Точнее, должно быть $\omega \sin\theta \gg m$, где ϑ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}$; при $\vartheta = 0$ пары вообще не рождаются. Ниже полагаем $\vartheta = \pi/2$.

(точнее — в выражении для dI/ω); при этом $d^3k = \omega^2 d\omega do_n$ заменяется на d^3p_+:

$$dw = \frac{e^2}{4\pi^2}\frac{d^3p_+}{\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-} - \frac{\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2}{4\varepsilon_-^2}\omega_{0+}^2\tau^2\right)\times$$
$$\times\exp\left\{i\frac{\omega\tau\varepsilon_+}{\varepsilon_-}\left(1-\mathbf{n}\mathbf{v}_+ + \frac{\tau^2}{24}\omega_{0+}^2\right)\right\}d\tau, \qquad (91,7)$$

где $\omega_{0+} = |e|H/\varepsilon_+$; $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении импульса фотона, лежащего в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Интегрирование производится так же, как это было сделано в § 90, причем (поскольку выражение (91,7) зависит только от угла между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}_+$) безразлично — интегрировать по do_+ или по do_n. Поэтому ответ можно получить непосредственно по аналогии с (90,23):

$$dw = \frac{m^2e^2}{\sqrt{\pi}}\frac{d\varepsilon_+}{\omega^2}\left\{\int\limits_x^\infty \Phi(\xi)\,d\xi + \left(\frac{2}{x} - \varkappa x^{1/2}\right)\Phi'(x)\right\}, \qquad (91,8)$$

где теперь

$$x = \left(\frac{m^3\omega}{|e|H\varepsilon_+\varepsilon_-}\right)^{2/3}, \quad \varkappa = \frac{|e|H\omega}{m^3}\left(=\frac{\hbar^2|e|H\omega}{m^3c^5}\right). \qquad (91,9)$$

Полная вероятность рождения пары в единицу времени получается интегрированием (91,8) по ε_+ (причем, ввиду очевидной симметрии по отношению к ε_+ и $\varepsilon_- = \omega - \varepsilon_+$, достаточно интегрировать от 0 до $\omega/2$ и затем удвоить результат). Производя замену переменной интегрирования ε_+ на x и интегрируя первый член в (91,8) дважды по частям, получаем

$$w = -\frac{|e|^3 H}{m\varkappa\sqrt{\pi}}\int\limits_{(4/\varkappa)^{2/3}}^{\infty}\frac{2\left(x^{3/2}+1/\varkappa\right)\Phi'(x)}{x^{11/4}\left(x^{3/2}-4/\varkappa\right)^{1/2}}\,dx \qquad (91,10)$$

(*А. И. Никишов, В. И. Ритус*, 1967).

В предельном случае слабых полей ($\varkappa \ll 1$) в интеграле (91,10) существенны значения x вблизи нижнего предела. Поскольку эти значения велики, можно воспользоваться асимптотическим выражением для функции Эйри

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2x^{1/4}}\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

(см. III, § b). Введя переменную интегрирования $y = x^{3/2} - 4/\varkappa$ и положив $y = 0$ везде, где это возможно, получим в результате вычисления

$$w = \frac{3^{3/2}|e|^3 H}{2^{9/2} m} \exp\left(-\frac{8}{3\varkappa}\right), \quad \varkappa \ll 1. \tag{91,11}$$

Экспоненциальное убывание вероятности при $\varkappa \to 0$ отвечает невозможности рождения пар в классическом пределе.

В обратном предельном случае сильных полей ($\varkappa \gg 1$) в интеграле (91,10) существен только второй член, причем он определяется областью значений x, в которой $x^{3/2} \sim 1/\varkappa \ll 1$. В этой области можно заменить функцию $\Phi'(x)$ ее значением

$$\Phi'(0) = -\frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{2\pi^{1/2}}.$$

Использовав значение интеграла

$$\int_1^\infty y^{-\nu}(y-1)^{\mu-1}\,dy = \frac{\Gamma(\nu-\mu)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu)},$$

получим

$$w = \frac{3^{1/6}\cdot 5\Gamma^2(2/3)}{2^{4/3}\cdot 7\pi^{1/2}\Gamma(7/6)}\,\frac{|e|^3 H}{m\varkappa^{1/3}} = 0{,}38\,\frac{|e|^3 H}{m\varkappa^{1/3}}, \quad \varkappa \gg 1. \tag{91,12}$$

Функция $mw(\varkappa)/|e|^3 H$ имеет максимум, равный 0,11, при $\varkappa \approx 11$.

§ 92. Тормозное излучение электрона на ядре. Нерелятивистский случай

Этот и несколько следующих параграфов посвящены важному явлению *тормозного излучения*, сопровождающего столкновения частиц. Начнем с нерелятивистского столкновения электрона с ядром. Будем считать, что ядро остается неподвижным, т. е. рассмотрим излучение при рассеянии электрона в кулоновом поле неподвижного центра (*A. Sommerfeld*, 1931).

Исходим из формулы (45,5) для вероятности дипольного излучения

$$dw = \frac{\omega^3}{2\pi}|\mathbf{e}^*\mathbf{d}_{fi}|^2\,do_{\mathbf{k}}. \tag{92,1}$$

В данном случае начальное и конечное состояния электрона относятся к непрерывному спектру, а частота фотона

$$\omega = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}'^2), \tag{92,2}$$

где $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}'$ — начальный и конечный импульсы электрона. Если начальная и конечная волновые функции электрона нормированы на одну частицу в объеме $V = 1$, то выражение