вычисления

$$w = \frac{3^{3/2}|e|^3H}{2^{9/2}m}\exp\left(-\frac{8}{3\varkappa}\right), \quad \varkappa \ll 1. \tag{91,11}$$

Экспоненциальное убывание вероятности при $\varkappa \to 0$ отвечает невозможности рождения пар в классическом пределе.

В обратном предельном случае сильных полей ($\varkappa \gg 1$) в интеграле (91,10) существен только второй член, причем он определяется областью значений x, в которой $x^{3/2} \sim 1/\varkappa \ll 1$. В этой области можно заменить функцию $\Phi'(x)$ ее значением

$$\Phi'(0) = -\frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{2\pi^{1/2}}.$$

Использовав значение интеграла

$$\int_1^\infty y^{-\nu}(y-1)^{\mu-1}\,dy = \frac{\Gamma(\nu-\mu)\,\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu)},$$

получим

$$w = \frac{3^{1/6}\cdot 5\Gamma^2(2/3)}{2^{1/3}\cdot 7\pi^{1/2}\Gamma(7/6)}\,\frac{|e|^3H}{m\varkappa^{1/3}} = 0{,}38\,\frac{|e|^3H}{m\varkappa^{1/3}}, \quad \varkappa \gg 1. \tag{91,12}$$

Функция $mw(\varkappa)/|e|^3H$ имеет максимум, равный 0,11, при $\varkappa \approx 11$.

§ 92. Тормозное излучение электрона на ядре. Нерелятивистский случай

Этот и несколько следующих параграфов посвящены важному явлению *тормозного излучения*, сопровождающего столкновения частиц. Начнем с нерелятивистского столкновения электрона с ядром. Будем считать, что ядро остается неподвижным, т. е. рассмотрим излучение при рассеянии электрона в кулоновом поле неподвижного центра (*A. Sommerfeld*, 1931).

Исходим из формулы (45,5) для вероятности дипольного излучения

$$dw = \frac{\omega^3}{2\pi}\,|\mathbf{e}^*\mathbf{d}_{fi}|^2\,do_{\mathbf{k}}. \tag{92,1}$$

В данном случае начальное и конечное состояния электрона относятся к непрерывному спектру, а частота фотона

$$\omega = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}'^2), \tag{92,2}$$

где $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}'$ — начальный и конечный импульсы электрона. Если начальная и конечная волновые функции электрона нормированы на одну частицу в объеме $V = 1$, то выражение

(92,1), умноженное на $d^3p'/(2\pi)^3$ и деленное на плотность падающего потока, $v/V = v$, даст сечение $d\sigma_{\mathbf{kp}'}$ излучения фотона $\mathbf{k}$ в телесный угол $do_{\mathbf{k}}$ с рассеянием электрона в интервал состояний d^3p'. Заменив матричный элемент дипольного момента $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ матричным элементом импульса согласно

$$\mathbf{d}_{fi} = -\frac{1}{i\omega}\frac{e}{m}\mathbf{p}_{fi},$$

запишем выражение для сечения в виде[1])

$$d\sigma_{\mathbf{kp}'} = \frac{\omega e^2}{(2\pi)^4 mp}|\mathbf{e}^*\mathbf{p}_{fi}|^2 do_{\mathbf{k}} d^3p', \tag{92,3}$$

где

$$\mathbf{p}_{fi} = \int \psi_f^* \hat{\mathbf{p}} \psi_i d^3x = -i\int \psi_f^* \nabla \psi_i d^3x.$$

В качестве ψ_i и ψ_f надо воспользоваться точными волновыми функциями в кулоновом поле притяжения, причем теми функциями, которые асимптотически содержат в себе плоскую и сферическую волны; в ψ_f сферическая волна должна быть сходящейся, а в ψ_i — расходящейся (см. III, § 136). Эти функции имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_i &= A_i e^{i\mathbf{pr}} F(i\nu,\ 1,\ i(pr - \mathbf{pr})), \qquad \nu = \frac{Ze^2 m}{p}; \\ \psi_f &= A_f e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}} F(-i\nu',\ 1,\ -i(p'r + \mathbf{p}'\mathbf{r})), \qquad \nu' = \frac{Ze^2 m}{p'} \end{aligned} \tag{92,4}$$

с нормировочными коэффициентами

$$A_i = e^{\pi\nu/2}\Gamma(1 - i\nu), \quad A_f = e^{\pi\nu'/2}\Gamma(1 + i\nu'). \tag{92,5}$$

Заметив, что

$$\nabla F(i\nu,\ 1,\ i(pr - \mathbf{pr})) = i\left(p\frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p}\right)F' = -\frac{p}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}\right)_\nu,$$

запишем $\nabla\varphi_i$ в виде

$$\nabla\psi_i = i\mathbf{p}\psi_i - A_i e^{i\mathbf{pr}}\frac{p}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}\right)_\nu.$$

При умножении на ψ_f^* и интегрировании первый член обращается в нуль ввиду ортогональности ψ_i и ψ_f. Поэтому для матричного элемента $\mathbf{p}_{fi}$ имеем

$$\mathbf{p}_{fi} = iA_i A_f p\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}}, \tag{92,6}$$

где

$$J = \int \frac{e^{-i\mathbf{qr}}}{r} F(i\nu',\ 1,\ i(p'r + \mathbf{p}'\mathbf{r}))\, F(i\nu,\ 1,\ i(pr - \mathbf{pr}))\, d^3x, \tag{92,7}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}.$$

[1]) В этом параграфе обозначаем $p = |\mathbf{p}|$, $p' = |\mathbf{p}'|$.

Мы вынесли $\partial/\partial\mathbf{p}$ из-под знака интеграла, подразумевая, что при дифференцировании J величины ν, ν', $\mathbf{q}$ должны рассматриваться как независимые параметры и лишь после проведения дифференцирования следует выразить ν и $\mathbf{q}$ через $\mathbf{p}$.

Интеграл вычисляется путем замены каждой из вырожденных гипергеометрических функций их выражениями в виде контурных интегралов. Мы приведем здесь лишь результат[1]:

$$J = BF(i\nu', i\nu, 1, z),$$

$$B = 4\pi e^{-\pi\nu}(-\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{qp})^{-i\nu}(\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{qp}')^{-i\nu'}(\mathbf{q}^2)^{i\nu+i\nu'-1},$$

$$z = 2\frac{\mathbf{q}^2(pp' + \mathbf{pp}') - 2(\mathbf{qp})(\mathbf{qp}')}{(\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{qp}')(\mathbf{q}^2 + 2\mathbf{qp})}. \tag{92,8}$$

Здесь $F(i\nu', i\nu, 1, z)$ — полная гипергеометрическая функция.

После дифференцирования в (92,6) можно положить $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$; при этом

$$z = -2\frac{pp' - \mathbf{pp}'}{(p - p')^2}, \qquad \mathbf{q}^2 = (p - p')^2(1 - z) \tag{92,9}$$

$(z < 0)$. Отметим также, что

$$-\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{qp} = \mathbf{q}^2 - 2\mathbf{qp}' = \mathbf{p}^2 - \mathbf{p}'^2 > 0.$$

В результате находим для матричного элемента следующее окончательное выражение:

$$\mathbf{p}_{fi} = A_i A_f \frac{8\pi i e^{-\pi\nu}}{(p - p')^3(p + p')}\left(\frac{p + p'}{p - p'}\right)^{-i(\nu+\nu')} \times$$

$$\times (1 - z)^{i(\nu+\nu')-1}\left[i\nu p\mathbf{q}F(z) + (1 - z)F'(z)(p'\mathbf{p} - p\mathbf{p}')\right], \tag{92,10}$$

где для краткости обозначено

$$F(z) = F(i\nu', i\nu, 1, z). \tag{92,11}$$

Сечение получается подстановкой (92,10) в (92,3), но общая формула очень громоздка и трудно обозрима. Поэтому мы сразу перейдем к вычислению спектрального распределения излучения, т. е. проинтегрируем сечение по направлениям фотона и конечного электрона.

Интегрирование по $do_\mathbf{k}$ и суммирование по поляризациям фотона сводится к усреднению по всем направлениям $\mathbf{e}$ и умножению на $2\cdot 4\pi$, т. е. к замене

$$e_i e_k^* do_\mathbf{k} \to \frac{8\pi}{3}\delta_{ik}.$$

После этого сечение

$$d\sigma_{\mathbf{p}'} = \frac{4\omega e^2}{3pm}|\mathbf{p}_{fi}|^2\frac{d^3p'}{(2\pi)^3} = \frac{\omega e^2 p'}{6\pi^3 p}|\mathbf{p}_{fi}|^2 d\omega\, do_{\mathbf{p}'}. \tag{92,12}$$

[1] Вычисления см. *Nordsieck A.*//Phys. Rev. — 1954. — Vol. 93. — P. 785.

Квадрат $|\mathbf{p}_{fi}|^2$ вычисляем, используя (92,9—11) и учитывая, что

$$|\Gamma(1-i\nu)|^2=\frac{\pi\nu}{\operatorname{sh}\pi\nu}.$$

Получаем

$$|\mathbf{p}_{fi}|^2=\frac{2^8\pi^4(Ze^2)^2m^2}{(p+p')^2(p-p')^4(1-e^{-2\pi\nu'})(e^{2\pi\nu}-1)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\nu\nu'}{1-z}|F|^2-z|F'|^2+i\frac{\nu+\nu'}{2}\frac{z}{1-z}(FF'^*-F^*F')\right\}. \qquad (92,13)$$

Для интегрирования сечения (92,12) по $do_{\mathbf{p}'}=2\pi\sin\vartheta d\vartheta$ перейдем от переменной ϑ (угол рассеяния) к переменной

$$z=-\frac{2pp'}{(p-p')^2}(1-\cos\vartheta),\quad do_{\mathbf{p}'}\to\frac{\pi(p-p')^2}{pp'}dz.$$

Чтобы взять интеграл по dz, преобразуем выражение в фигурных скобках в (92,13). Согласно дифференциальному уравнению гипергеометрических функций (см. III (е, 2)) имеем

$$z(1-z)F''+[1-(1+i\nu+i\nu')z]F'+\nu\nu'F=0,$$
$$z(1-z)F''^*+[1-(1-i\nu-i\nu')z]F'^*+\nu\nu'F^*=0.$$

Умножив эти два уравнения соответственно на F^* и F и сложив, получим

$$(1-z)\left[\frac{d}{dz}z(F'F^*+F'^*F)-2z|F'|^2+\right.$$
$$\left.+\frac{i(\nu+\nu')z}{1-z}(F'^*F-F'F^*)+\frac{2\nu\nu'}{1-z}|F|^2\right]=0.$$

Отсюда видно, что выражение в фигурных скобках в (92,13) равно

$$\{\ldots\}=-\frac{1}{2}\frac{d}{dz}z(F'F^*+FF'^*) \qquad (92,14)$$

и интегрируется непосредственно.

Собрав полученные формулы, найдем окончательное выражение для сечения тормозного излучения в интервале частот $d\omega$ [1])

$$d\sigma_\omega=\frac{64\pi^2}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{m^2c^2}{(p-p')^2}\frac{p'}{p}\frac{1}{(1-e^{-2\pi\nu'})(e^{2\pi\nu}-1)}\left(-\frac{d}{d\xi}|F(\xi)|^2\right)\frac{d\omega}{\omega}, \qquad (92,15)$$

где

$$\nu=\frac{Z\alpha mc}{p}=\frac{Ze^2}{\hbar v},\quad \nu'=\frac{Ze^2}{\hbar v'},\quad p'=\sqrt{p^2-2m\hbar\omega},$$
$$F(\xi)=F(i\nu',\ i\nu,\ 1,\ \xi),\quad \xi=-\frac{4pp'}{(p-p')^2}.$$

[1]) Формулы (92,15—25) пишем в обычных единицах.

Рассмотрим предельный случай, когда обе скорости v и v' настолько велики, что $\nu \ll 1$, $\nu' \ll 1$ (но, разумеется, по-прежнему $v \ll 1$, так что $Z\alpha \ll \nu \ll 1$; это возможно лишь для малого Z). Для вычисления в этом случае производной $F'(\xi)$ воспользуемся формулой

$$\frac{d}{dz} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ z),$$

которую легко получить простым дифференцированием гипергеометрического ряда. Имеем

$$F'(\xi) \approx i\nu \cdot i\nu' F(1,\ 1,\ 2,\ \xi) = \frac{\nu\nu'}{\xi} \ln(1-\xi)$$

(последнее равенство очевидно из прямого сравнения соответствующих рядов). Для самой же функции $F(\xi)$ имеем просто

$$F(\xi) \approx F(0,\ 0,\ 1,\ \xi) = 1.$$

В результате находим из (92,15)

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{c^2}{v^2} \ln\frac{v+v'}{v-v'} \frac{d\omega}{\omega},$$
$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1, \quad \frac{Ze^2}{\hbar v'} \ll 1. \tag{92,16}$$

Малость ν и ν' есть как раз условие применимости борновского приближения в случае кулонова взаимодействия. Поэтому саму по себе формулу (92,16) проще получить непосредственно с помощью теории возмущений (см. задачу 1).

Пусть теперь быстрый ($\nu \ll 1$) электрон теряет на излучение значительную долю своей энергии, так что $v' \ll v$ и ν' может быть не малым. Тогда

$$-\xi \approx \frac{4p'}{p} = \frac{4\nu}{\nu'} \ll 1, \quad F(\xi) \approx F(i\nu',\ 0,\ 1,\ \xi) = 1,$$
$$F'(\xi) \approx -\nu\nu' F(1+i\nu',\ 1,\ 2,\ \xi) \approx -\nu\nu',$$

и сечение

$$d\sigma_\omega = \frac{64\pi}{3} Z^3 \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \frac{1}{1-\exp(-2\pi Ze^2/\hbar v')} \frac{d\omega}{\omega}, \tag{92,17}$$
$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1, \quad \frac{Ze^2}{\hbar v'} \gtrsim 1.$$

При $\nu' \ll 1$ эта формула дает такое же предельное выражение

$$d\sigma_\omega = \frac{32}{3} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{c^2 v'}{v^3} \frac{d\omega}{\omega},$$

как и формула (92,16) при $v' \ll v$. Поэтому формулы (92,16—17) вместе перекрывают (при $\nu \ll 1$) весь диапазон значений ν'.

При $\omega\to\omega_0$ (где $\hbar\omega_0 = mv^2/2$) скорость $v'\to 0$ и $\nu'\to\infty$. В этом пределе (92,17) дает

$$d\sigma_\omega = \frac{128\pi}{3} Z^3\alpha^2 r_e^2\left(\frac{c}{v}\right)^3 \frac{\hbar\, d\omega}{mv^2}. \tag{92,18}$$

Таким образом, $d\sigma_\omega/d\omega$ стремится при $\omega\to\omega_0$ к конечному пределу. Это обстоятельство можно обосновать в общем виде соображениями, аналогичными изложенным в III, § 147. Физически оно связано с тем, что частота $\omega=\omega_0$ является границей лишь непрерывного тормозного спектра. Электрон может излучить также и частоту $\omega>\omega_0$, перейдя в связанное состояние. Но сильно возбужденные связанные состояния в кулоновом поле по своим свойствам мало отличаются от близких к их границе свободных состояний. Поэтому граница, отделяющая непрерывный спектр от дискретного, по существу не является физически выделенной точкой.

Перейдем к случаю, когда оба параметра $\nu,\ \nu'\gg 1$. В этом случае движение как начального, так и конечного электронов квазиклассично. Мы будем считать, что $p^2/2m\sim\hbar\omega$; тогда нам понадобится асимптотическое выражение для функции $F(\xi)$ при $\nu,\ \nu'\to\infty$ и $\xi\sim 1$ (более точное условие будет сформулировано ниже, (92,24)).

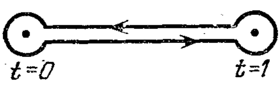

Рис. 17

Для получения этого выражения исходим из интегрального представления гипергеометрической функции III (e, 3), которое запишем в виде

$$F(i\eta\nu', i\nu', 1, \xi) = \frac{e^{-\pi\eta\nu'}}{2\pi i}\oint\limits_{C'} t^{i\eta\nu'-1}(1-t)^{-i\eta\nu'}(1-t\xi)^{-i\nu'}dt', \tag{92,19}$$

где введено обозначение

$$\eta=\nu/\nu', \qquad 0<\eta<1,$$

так что

$$\xi = -\frac{4\eta}{(1-\eta)^2}. \tag{92,20}$$

В качестве же контура интегрирования выбираем показанный на рис. 17 путь, проходящий вдоль отрезка вещественной оси и обходящий точки $t=0$ и $t=1$ [1]).

[1]) Для гипергеометрической функции $F(\alpha,\beta,\gamma,\xi)$ контур должен быть выбран так, чтобы при его обходе функция

$$V(t) = e^t t^{\alpha-\gamma+1}(t-1)^{1-\alpha}$$

возвращалась к исходному значению. При целом γ (в данном случае $\gamma=1$) указанный контур этому условию удовлетворяет.

При $\nu, \nu' \gg 1$* значение подынтегрального выражения на нижней части этого контура мало и им можно пренебречь: при обходе точки $t=0$ сверху вниз подынтегральное выражение умножается на малый множитель $\exp(-2\pi\eta\nu')$, а при обходе точки $t=1$ снизу вверх — умножается на $\exp(2\pi\eta\nu')$. Интеграл

$$E=\frac{e^{-\pi\eta\nu'}}{2\pi i}\int e^{\nu' f(t)}\frac{dt}{t}, \qquad f(t)=i\ln\frac{t^{\eta}}{(1-t)^{\eta}(1-\xi t)}, \tag{92,21}$$

вычисляем методом перевала. Перевальная точка t_0 определяется условием $f'(t_0)=0$, откуда $t_0=(1-\eta)/2$. В этой точке, однако, обращается в нуль также и производная $f''(t_0)$, так что надо писать

$$f(t)\approx f(t_0)+\frac{ia}{3}\tau^3, \qquad \tau=t-t_0,$$

где

$$f(t_0)=2\pi\eta+i(1+\eta)\ln\frac{1-\eta}{1+\eta}, \qquad a=\frac{1}{2i}f'''(t_0)=\frac{16\eta}{(1-\eta^2)^2}.$$

Предэкспоненциальный же множитель $1/t$ в подынтегральном выражении пишем в виде

$$\frac{1}{t}\approx\frac{1}{t_0}-\frac{\tau}{t_0^2}$$

(ограничиться членом $1/t_0$ здесь нельзя, так как это привело бы к обращению в нуль фигурирующей в (92,15) производной $d|F(\xi)|^2/d\xi$). Таким образом, находим, после очевидной подстановки в интегралах,

$$F\approx\frac{1}{2\pi i t_0(a\nu')^{1/3}}\exp\{-\pi\eta\nu'+\nu' f(t_0)\}\times$$
$$\times\left\{-\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix^3/3}dx+\frac{i}{t_0(a\nu')^{1/3}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{ix^3/3}dx\right\}. \tag{92,22}$$

Интегралы здесь равны соответственно

$$2\int_0^{\infty}\cos\frac{x^3}{3}dx=\frac{2\pi}{3^{2/3}\Gamma(2/3)},$$

$$2\int_0^{\infty}x\sin\frac{x^3}{3}dx=3^{1/6}\Gamma(2/3).$$

Аналогичным образом вычисляется производная $F'(\xi)$ (согласно (92,19) она дается интегралом, отличающимся от (92,21) лишь заменой предэкспоненциального множителя $1/it$ на

$\nu'/(1-\xi t)$. После этого простое вычисление приводит к результату

$$-\frac{d}{d\xi}|F(\xi)|^2=\frac{(1-\eta)^2e^{2\pi\nu}}{4\sqrt{3}\pi\eta}.$$

Наконец, подставив это выражение в формулу (92,15), найдем, с требуемой точностью, следующий простой результат:

$$d\sigma_\omega=\frac{16\pi}{3^{3/2}}Z^2\alpha r_e^2\frac{m^2c^2}{p^2}\frac{d\omega}{\omega}. \qquad (92,23)$$

Условие применимости этой формулы, т. е. условие применимости асимптотического выражения (92,22), состоит в требовании малости в последнем второго члена по сравнению с первым: $(1-\eta)\nu\gg 1$, или после выражения параметров гипергеометрической функции через физические величины:

$$\omega\gg\frac{v}{Ze^2}\frac{mv^2}{2}. \qquad (92,24)$$

Условие (92,24) совпадает с условием, определяющим «высокочастотный предел» при классическом излучении в кулоновом поле притяжения, а величина $\hbar\omega\,d\sigma_\omega$ с $d\sigma_\omega$ из (92,23) совпадает с выражением II (70,22) для «эффективного торможения» в этом пределе. Этот результат нуждается в некотором обсуждении. Может показаться, что для применимости классической формулы излучения требуется, кроме квазиклассичности движения, также и малость энергии кванта по сравнению с энергией электрона, т. е. условие $\hbar\omega\ll mv^2/2$, что не предполагалось при выводе (92,23). В действительности, однако, значение $\hbar\omega$ должно быть мало не по сравнению с энергией электрона на бесконечности, а по сравнению с его кинетической энергией на том участке траектории, где в основном происходит излучение. Эта энергия гораздо больше начальной из-за ускорения электрона в поле иона.

Действительно, излучение высоких частот происходит в основном на малых расстояниях от иона, где

$$r/v(r)\sim\omega. \qquad (92,25)$$

(Мы обозначили $v(r)$ скорость электрона на расстоянии r от иона, в отличие от скорости v на бесконечности.) Учитывая, что при этом $Ze^2/r\sim mv^2(r)$, находим, что кинетическая энергия на участке, где происходит излучение:

$$\frac{mv^2(r)}{2}\sim\frac{m}{2}\left(\frac{\omega Ze^2}{m}\right)^{3/2}\sim\frac{mv^2}{2}\left(\frac{\omega Ze^2}{mv^3}\right)^{3/2}\gg\frac{mv^2}{2}.$$

Поэтому излучение даже кванта с энергией порядка $mv^2/2$ не меняет существенно движения на участке излучения и дополнительного условия малости $\hbar\omega$ не требуется.

Отметим также, что движение на участке (92, 25) при заданном моменте импульса $\hbar l$ не зависит от начальной энергии. Соответственно и энергия, излучаемая при пролете по траектории (обозначаемая в II, § 70 как $d\mathscr{E}_\omega$), зависит только от l. Сечение $d\sigma_\omega$ можно получить, умножая вероятность излучения $d\mathscr{E}_\omega/\hbar\omega$ на $2\pi\rho d\rho$ (ρ — прицельное расстояние) и интегрируя по всем ρ. Поскольку в квазиклассическом случае

$$\rho\, d\rho = \hbar^2 l\, dl/m^2 v^2,$$

это приводит к зависимости $d\sigma_\omega \sim 1/v^2$, соответствующей (92,23). Приведенное рассуждение объясняет, почему в эту формулу входит именно начальная (а не конечная) скорость электрона.

Для того чтобы перейти к классическим формулам во всей области $(1-\eta)\nu \sim 1$, $\nu \gg 1$, надо было бы найти асимптотику гипергеометрической функции в условиях близости перевальной точки к особой точке $t = 0$; мы не будем останавливаться здесь на этом ввиду очевидности окончательного результата.

Все написанные формулы относятся к кулонову полю притяжения. Сечение излучения в поле отталкивания получается из (92,15) заменой: $\nu \to -\nu$, $\nu' \to -\nu'$. При этом, в частности, предельная борновская формула (92,16) вообще не меняется. В пределе же: $\nu \ll 1$, $\nu' \to \infty$ — получим вместо (92,18)

$$d\sigma_\omega = \frac{128\pi}{3} Z^3 \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \exp\left(-\frac{\sqrt{2mc^2}\,\pi Z\alpha}{\sqrt{\hbar(\omega_0-\omega)}}\right)\frac{\hbar\, d\omega}{mv^2}, \qquad (92,26)$$

т. е. дифференциальное сечение стремится при $\omega \to \omega_0$ к нулю по экспоненциальному закону. Этот результат снова естествен: в поле отталкивания связанные состояния отсутствуют и частота $\omega = \omega_0$ является истинной границей спектра излучения.

Задачи

1. Найти в борновском приближении сечение тормозного излучения при нерелятивистском столкновении двух частиц с различными отношениями e/m.

Решение. Дипольный момент двух частиц с зарядами e_1, e_2 и массами m_1, m_2 в системе их центра инерции равен

$$\mathbf{d} = \mu\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\mathbf{r},$$

где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Отсюда

$$\ddot{\mathbf{d}} = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\nabla\frac{e_1 e_2}{r}.$$

Матричный элемент

$$\mathbf{d}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = -\frac{1}{\omega^2}(\ddot{\mathbf{d}})_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}, \qquad \omega = \frac{p^2 - p'^2}{2\mu}$$

($\mathbf{p} = \mu\mathbf{v}$, $\mathbf{p}' = \mu\mathbf{v}'$ — импульсы относительного движения) вычисляется по плоским волнам[1])

$$\psi_{\mathbf{p}} = e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad \psi_{\mathbf{p}'} = e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}}$$

с помощью формулы

$$\left(\nabla \frac{1}{r}\right)_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = \frac{4\pi i \mathbf{q}}{q^2}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}.$$

В результате находим

$$d\sigma_{\mathbf{k}\mathbf{p}'} = \frac{e_1^2 e_2^2}{\pi^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{v'}{v}\frac{\mu^2}{q^4}(\mathbf{e}\mathbf{q})(\mathbf{e}^*\mathbf{q})\frac{d\omega}{\omega}\, do_{\mathbf{p}'}\, do_{\mathbf{k}}.$$

После суммирования по поляризациям угловое распределение излучения дается множителем $\sin^2\Theta$, где Θ — угол между направлением фотона $\mathbf{k}$ и вектором $\mathbf{q}$, лежащим в плоскости рассеяния (см. (45,4а)).

После интегрирования по направлениям фотона

$$d\sigma_{\omega\theta} = \frac{16}{3} e_1^2 e_2^2 \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{v'}{v}\frac{d\omega}{\omega}\frac{\sin\theta\, d\theta}{v^2 + v'^2 - 2vv'\cos\theta},$$

где θ — угол рассеяния. Наконец, интегрирование по $d\theta$ дает

$$d\sigma_{\omega} = \frac{16}{3} e_1^2 e_2^2 \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{1}{v^2} \ln\frac{v + v'}{v - v'}\frac{d\omega}{\omega}.$$

Для излучения в поле неподвижного кулонова центра эта формула совпадает с (92,16).

2. Найти в борновском приближении сечение тормозного излучения при нерелятивистском столкновении двух электронов[2]).

Решение. Дипольное излучение в этом случае отсутствует, так что надо рассматривать квадрупольное излучение. В классической теории спектральное распределение полной интенсивности квадрупольного излучения дается формулой

$$I_\omega = (1/90)\,|(\dddot{D}_{ik})_\omega|^2,$$

где $D_{ik} = \sum e\left(3x_i x_k - r^2\delta_{ik}\right)$ — тензор квадрупольного момента системы зарядов[3]). Для двух электронов в системе их центра инерции

$$D_{ik} = \frac{e}{2}\left(3x_i x_k - r^2\delta_{ik}\right), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

При переходе к квантовой теории компоненты Фурье надо заменить матричными элементами (ср. сказанное в § 45 о дипольном излучении), и принадлежащей нормировке волновых функций (плоских волн) получится — после деления на энергию фотона ω — сечение излучения с рассеянием электронов в интервал состояний d^3p':

$$d\sigma_{\mathbf{p}'} = \frac{1}{90\omega}\,|(\dddot{D}_{ik})_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \frac{d^3p'}{v\,(2\pi)^3},$$

---

[1]) Замена двух частиц одной частицей с приведенной массой допустима, конечно, только в нерелятивистском случае.

[2]) Скорость столкновения v удовлетворяет условиям $\alpha \ll e^2/\hbar v \ll 1$. Классический случай ($e^2/\hbar v \gg 1$) рассмотрен в задаче к II, § 71.

[3]) Эта формула получается из II (71,5) так же, как II (67,11) получается из II (67,8).

где $v = 2p/m$ — начальная скорость относительного движения; излучаемая частота $\omega = (p^2 - p'^2)/m$.

Оператор $\hat{\dddot{D}}_{ik}$ вычисляется путем трехкратного коммутирования D_{ik} с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{m} + \frac{e^2}{r}$$

и равен¹)

$$\hat{\dddot{D}}_{ik} = \frac{2e^3}{m}\left[6\left(\frac{x_i}{r^3}\hat{p}_k + \hat{p}_k\frac{x_i}{r^3}\right) + 6\left(\frac{x_k}{r^3}\hat{p}_i + \hat{p}_i\frac{x_k}{r^3}\right) - \right.$$
$$\left. - 9\left(\frac{x_i x_k x_l}{r^5}\hat{p}_l + \hat{p}_l\frac{x_i x_k x_l}{r^5}\right) - \delta_{ik}\left(\frac{x_l}{r^3}\hat{p}_l + \hat{p}_l\frac{x_l}{r^2}\right)\right].$$

С учетом тождественности обеих частиц (электронов) матричные элементы вычисляются по волновым функциям

$$\psi_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\mathbf{pr}} \pm e^{-i\mathbf{pr}}\right), \qquad \psi_{\mathbf{p}'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}} \pm e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}}\right),$$

где знаки «+» и «—» соответствуют суммарным спинам электронов 0 и 1 (перестановке электронов отвечает замена $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$).

Громоздкие вычисления приводят к следующей формуле для спектрального распределения излучения:

$$d\sigma_\omega = \frac{4}{15}\alpha r_e^2\left\{17 - \frac{3x^2}{(2-x)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{12(2-x)^4 - 7(2-x)^2x^2 - 3x^4}{(2-x)^3\sqrt{1-x}}\operatorname{Arch}\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}\frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx,$$

где $x = \omega/\varepsilon$, а $\varepsilon = p^2/m$ — начальная энергия относительного движения электронов; сечение усреднено по значениям полного спина электронов. Эффективное торможение

$$\varkappa_{\text{изл}} = \hbar\int_0^\varepsilon \omega\, d\sigma_\omega = 8{,}1\alpha r_e^2\varepsilon$$

(*Б. К. Федюшин*, 1952).

3. Определить энергию излучения, возникающего при испускании ядром нерелятивистского электрона в s-состоянии.

Решение. Волновая функция испущенного ядром электрона — расходящаяся сферическая s-волна, нормированная на равный единице полный

¹) Это выражение аналогично классической формуле

$$\dddot{D}_{ik} = \frac{4e^3}{m^2}\left[6\frac{x_i}{r^3}p_k + 6\frac{x_k}{r^3}p_i - 9\frac{x_i x_k}{r^5}\mathbf{pr} - \frac{1}{r^3}\delta_{ik}\mathbf{pr}\right],$$

которая получилась бы в результате дифференцирования D_{ik} с учетом классического уравнения движения

$$\frac{m}{2}\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2\mathbf{r}}{\mathbf{r}^3}.$$

поток:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{4\pi v}} \frac{e^{ipr}}{r}$$

(см. III (33,14)). В качестве волновой функции конечного (после испускания фотона) состояния электрона выберем плоскую волну

$$\psi_f = e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}}.$$

Матричный элемент перехода

$$\mathbf{p}_{fi} = (\mathbf{p}_{if})^* = \left(\int \psi_i^* \hat{\mathbf{p}} \psi_f \, d^3x\right)^* = \frac{\mathbf{p}'}{\sqrt{4\pi v}} \int e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}+ipr} \frac{d^3x}{r} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{v}} \frac{\mathbf{p}'}{\mathbf{p}'^2 - \mathbf{p}^2} = -\sqrt{\frac{\pi}{v}} \frac{\mathbf{v}'}{\omega}$$

(интеграл вычисляется согласно (57,6а)). Энергия излучения получается из формулы (45,8), умноженной на $d^3p'/(2\pi)^3$ и проинтегрированной по направлениям $\mathbf{p}'$ (что сводится к умножению на 4π). В результате получим спектральное распределение излученной энергии

$$dE_\omega = \frac{2e^2 v'^3}{3\pi v} d\omega.$$

При $\omega \to 0$ конечная скорость электрона $v' \to v$, и эта формула совпадает, как и должно быть, с нерелятивистским пределом классического результата (см. задачу к II, § 69). Полная излученная энергия (в обычных единицах)

$$E = \frac{4}{15\pi} \alpha \left(\frac{v}{c}\right)^2 \varepsilon,$$

где $\varepsilon = mv^2/2$ — начальная энергия электрона.

4. Определить энергию излучения, возникающего при отражении нерелятивистского электрона от бесконечно высокой «потенциальной стенки».

Решение. Пусть электрон движется нормально к стенке. Хотя фотон может быть испущен в любом направлении, но поскольку в нерелятивистском случае импульс фотона мал по сравнению с импульсом электрона, можно считать, что и отраженный электрон будет двигаться нормально к плоскости стенки. Пусть стенка находится при $x = 0$, а электрон движется со стороны $x > 0$. Волновые функции стационарных состояний одномерного движения, нормированные на $\delta(p/2\pi)$ $(p = p_x)$, имеют вид стоячих волн (см. III, § 21):

$$\psi_i = 2 \sin px, \qquad \psi_f = 2 \sin p'x.$$

Матричный элемент оператора $\hat{p} = \hat{p}_x$:

$$p_{fi} = -4i \int_0^\infty \sin p'x \frac{d}{dx} \sin px \, dx = -\frac{4ipp'}{p^2 - p'^2}$$

(интегралы такого вида надо понимать как предел при $\delta \to +0$ от значения, получающегося путем введения в подынтегральное выражение множителя $e^{-\delta x}$).

Энергия, излучаемая при однократном отражении электрона, получается из (45,8) умножением на $dp' = d\omega/v'$ и делением на $v/2\pi$ (плотность потока бегущей к барьеру волны в начальной функции ψ_i):

$$dE_\omega = \frac{4\omega^2 e^2}{3m^2} |p_{fi}|^2 \frac{2\pi\, d\omega}{vv'} = \frac{8}{3\pi} e^2 vv'\, d\omega. \qquad (1)$$

При малых частотах ($\omega \ll \varepsilon = mv^2/2$) имеем $v' \approx v$ и (1) переходит в классическую формулу II (69,5) (которую надо интегрировать по углам и учесть, что $v = \Delta v/2$, где Δv — изменение скорости электрона при отражении); так и должно быть, поскольку при отражении от стенки условие малости времени столкновения II (69,1) во всяком случае выполняется. Квантовая формула (1) позволяет, однако, найти также и полную излучаемую энергию:

$$E = \int_0^\varepsilon \frac{dE_\omega}{d\omega} d\omega = \frac{16}{9\pi} \alpha\varepsilon \frac{v^2}{c^2}$$

(в обычных единицах).

5. Определить энергию тормозного излучения при рассеянии медленного электрона на атоме.

Решение. При условии $pa \ll 1$ (где a — атомные размеры) рассеяние на атоме изотропно и не зависит от энергии электрона (см. III, § 132). Волновые функции начального и конечного состояний электрона пишем в виде

$$\psi_i = e^{i\mathbf{pr}} + f\frac{e^{ipr}}{r}, \qquad \psi_f = e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}} + f\frac{e^{-ip'r}}{r},$$

где f — постоянная вещественная амплитуда рассеяния. Эти выражения относятся к асимптотической области расстояний $r \gg a$, которые в данном случае как раз и существенны: $r \sim 1/p \gg a$. Вычисленный по этим функциям матричный элемент

$$\mathbf{p}_{fi} = \frac{2\pi f}{\omega} (\mathbf{v} - \mathbf{v}')$$

(интегралы вычисляются, как в задаче 3). Подставив это выражение в (92,12), получим сечение излучения с рассеянием электрона в направлении $\mathbf{p}'$ (обычные единицы):

$$d\sigma_{\omega\mathbf{p}'} = \frac{2\alpha p'}{3\pi p c^2} (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2 d\sigma_{\text{упр}} \frac{d\omega}{\omega}, \qquad (1)$$

где $d\sigma_{\text{упр}} = f^2 do_{\mathbf{p}'}$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния. При $\hbar\omega \ll p^2/2m$ можно положить $p \approx p'$, и тогда эта формула переходит, как и следовало ожидать, в нерелятивистскую формулу для излучения мягких фотонов (см. § 98) [1]).

Интегрируя (1) по направлениям $\mathbf{p}'$, получаем

$$d\sigma_\omega = \frac{2\alpha p'}{3\pi c^2 p} (v^2 + v'^2)\, \sigma_{\text{упр}} \frac{d\omega}{\omega}, \qquad (2)$$

где $\sigma_{\text{упр}} = 4\pi f^2$ — полное сечение упругого рассеяния. Наконец, умножив на $\hbar\omega$ и проинтегрировав по ω от 0 до $p^2/2m = \varepsilon$, получим «эффективное торможение»

$$\varkappa_{\text{изл}} = \int \hbar\omega\, d\sigma_\omega = \frac{32}{45\pi} \alpha\sigma_{\text{упр}}\varepsilon \left(\frac{v}{c}\right)^2. \qquad (3)$$

[1]) Тот факт, что «факторизация» сечения (выделение множителя $\sigma_{\text{упр}}$) произошла в данном случае при произвольных ω, в известном смысле случаен и связан с независимостью амплитуды рассеяния от энергии.