

§ 93. Тормозное излучение электрона на ядре. Релятивистский случай

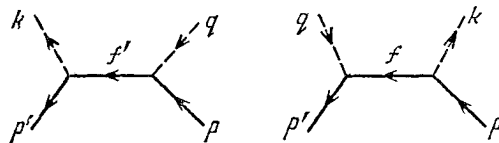
Обратимся к тормозному излучению электрона на ядре в случае релятивистских скоростей электрона¹⁾. При этом будем предполагать выполненным условие применимости борновского приближения, т. е. как для начальной (v), так и для конечной (v') скоростей электрона: $Ze^2/\hbar v \ll 1$, $Ze^2/\hbar v' \ll 1$. При этом во всяком случае заряд ядра не должен быть слишком велик: $Z\alpha \ll 1$.

Как и в предыдущем параграфе, будем пренебрегать отдачей ядра, так что ядро играет лишь роль источника внешнего поля (об оправдании такого пренебрежения см. § 97).

Согласно (91,4) сечение тормозного излучения выражается через его амплитуду формулой

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{\omega |p'|}{8(2\pi)^5 |p|} d\omega_k d\omega' d\omega. \quad (93,1)$$

В первом не исчезающем приближении матричному элементу M_{fi} отвечают две диаграммы:



$$(93,2)$$

Свободный конец q соответствует внешнему полю, так что $q = p' - p + k$ есть 4-вектор передачи импульса ядру. Пренебрежение отдачей означает, что временная компонента $q^0 = 0$.

Согласно диаграммам (93,2) имеем

$$M_{fi} = -e^2 A_0^{(e)}(\mathbf{q}) \sqrt{4\pi} e_{\mu\nu}^* \bar{u}' \left(\gamma^\mu \frac{\not{f}' + m}{f'^2 - m^2} \gamma^0 + \gamma^0 \frac{\not{f} + m}{f^2 - m^2} \gamma^\mu \right) u. \quad (93,3)$$

Промежуточные 4-импульсы $f = p - k$, $f' = p' + k$; введем обозначения:

$$f^2 - m^2 = -2kp \equiv -2\chi\omega, \quad f'^2 - m^2 = 2kp' \equiv 2\chi'\omega, \quad (93,4)$$

$A_0^{(e)}$ — скалярный потенциал внешнего поля; для чисто кулонова поля

$$A_0^{(e)}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi Ze}{q^2}. \quad (93,5)$$

¹⁾ Большая часть излагаемых ниже результатов была получена Бете и Гайтлером (H. A. Bethe, W. Heitler, 1934) и независимо Заутером (F. Sauter, 1934).

Подставляя в (93,1), имеем для сечения

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^6}{4\pi^2} \frac{|\mathbf{p}'| \omega}{|\mathbf{p}| q^4} e_{\mu}^* e_{\nu} (\bar{u}' Q^{\mu} u) (\bar{u} \bar{Q}^{\nu} u') d\omega_k d\omega' d\omega, \quad (93,6)$$

где

$$Q^{\mu} = \gamma^{\mu} \frac{\gamma f' + m}{2\omega \kappa'} \gamma^0 - \gamma^0 \frac{\gamma f + m}{2\omega \kappa} \gamma^{\mu},$$

$$\bar{Q}^{\nu} = \gamma^0 Q^{\nu+} \gamma^0 = \gamma^0 \frac{\gamma f' + m}{2\omega \kappa'} \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu} \frac{\gamma f + m}{2\omega \kappa} \gamma^0.$$

Не рассматривая поляризационных эффектов, усредним сечение по направлениям спина начального электрона и просуммируем по поляризациям конечных электрона и фотона. Это сводится к замене

$$e_{\mu}^* e_{\nu} (\bar{u}' Q^{\mu} u) (\bar{u} \bar{Q}^{\nu} u') \rightarrow -\frac{1}{2} \text{Sp} Q_{\mu} (\gamma p + m) \bar{Q}^{\mu} (\gamma p' + m).$$

Вычисление следа производится по стандартным формулам (см. § 22). Некоторое упрощение выкладок достигается использованием равенства

$$\gamma^0 (\gamma p) \gamma^0 = \gamma \bar{p},$$

где $\bar{p} = (\varepsilon, -\mathbf{p})$, если $p = (\varepsilon, \mathbf{p})$. Кроме того, число подлежащих вычислению членов можно сократить, если учесть симметрию по отношению к замене $p \leftrightarrow p'$, $k \rightarrow -k$, $q \rightarrow -q$ (такая замена приводит лишь к циклической перестановке множителей в произведении матриц и поэтому не меняет его следа).

В результате получается следующее выражение для дифференциального сечения тормозного излучения с испусканием фотона заданных частоты и направления и с вылетом вторичного электрона в заданном направлении¹⁾:

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha r_e^2}{4\pi^2} \frac{p' m^4}{p q^4} \frac{d\omega}{\omega} d\omega_k d\omega' \times$$

$$\times \left\{ \frac{q^2}{\kappa \kappa' m^2} (2\varepsilon^2 + 2\varepsilon'^2 - q^2) + q^2 \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa'} \right)^2 - 4 \left(\frac{\varepsilon}{\kappa'} - \frac{\varepsilon'}{\kappa} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2\omega q^2}{m^2} \left(\frac{1}{\kappa'} - \frac{1}{\kappa} \right) - \frac{2\omega^2}{m^2} \left(\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\kappa}{\kappa'} \right) \right\}, \quad (93,7)$$

где

$$\kappa = \varepsilon - n p, \quad \kappa' = \varepsilon' - n p' \quad (n = k/\omega), \quad q = p' + k - p.$$

¹⁾ Здесь и ниже в этом параграфе p , p' , q обозначают абсолютные значения трехмерных векторов: $p = |\mathbf{p}|$, $p' = |\mathbf{p}'|$, $q = |\mathbf{q}|$.

Простыми преобразованиями можно придать этой формуле вид, несколько более удобный для исследования:

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha r_e^2}{2\pi} \frac{d\omega}{\omega} \frac{p' m^2}{p q^4} \sin \theta d\theta \sin \theta' d\theta' d\varphi \times \\ \times \left\{ \frac{p'^2}{\kappa'^2} (4\varepsilon^2 - q^2) \sin^2 \theta' + \frac{p^2}{\kappa^2} (4\varepsilon'^2 - q^2) \sin^2 \theta + \right. \\ \left. + \frac{2\omega^2}{\kappa \kappa'} (p^2 \sin^2 \theta + p'^2 \sin^2 \theta') - \frac{2pp'}{\kappa \kappa'} (2\varepsilon^2 + 2\varepsilon'^2 - q^2) \right\} \times \\ \times \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi, \quad (93,8)$$

где

$$\kappa = \varepsilon - p \cos \theta, \quad \kappa' = \varepsilon' - p' \cos \theta', \\ q^2 = p^2 + p'^2 + \omega^2 - 2p\omega \cos \theta + 2p'\omega \cos \theta' - \\ - 2pp' (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi),$$

θ и θ' — углы между \mathbf{k} и соответственно \mathbf{p} и \mathbf{p}' , φ — угол между плоскостями \mathbf{k}, \mathbf{p} и \mathbf{k}, \mathbf{p}' .

Интегрирование (93,8) по направлениям фотона и вторичного электрона довольно громоздко. Оно приводит к следующей формуле для спектрального распределения излучения¹⁾:

$$d\sigma_{\omega} = Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{p'}{p} \left\{ \frac{4}{3} - 2\varepsilon\varepsilon' \frac{p^2 + p'^2}{p^2 p'^2} + \right. \\ \left. + m^2 \left(l \frac{\varepsilon'}{p^3} + l' \frac{\varepsilon}{p'^3} - \frac{l l'}{pp'} \right) + L \left[\frac{8\varepsilon\varepsilon'}{3pp'} + \frac{\omega^2}{p^3 p'^3} \right] \times \right. \\ \left. \times (\varepsilon^2 \varepsilon'^2 + p^2 p'^2 + m^2 \varepsilon \varepsilon') + \frac{m^2 \omega}{2pp'} \left(l \frac{\varepsilon \varepsilon' + p^2}{p^3} - l' \frac{\varepsilon \varepsilon' + p'^2}{p'^3} \right) \right\}, \quad (93,9)$$

где

$$L = \ln \frac{\varepsilon \varepsilon' + pp' - m^2}{\varepsilon \varepsilon' - pp' - m^2}, \quad l = \ln \frac{\varepsilon + p}{\varepsilon - p}, \quad l' = \ln \frac{\varepsilon' + p'}{\varepsilon' - p'}.$$

Напомним, что допустимые значения частот в полученных формулах ограничены только условием, налагаемым на конечную скорость электрона ($Z e^2 / v' \ll 1$): электрон не должен терять почти всю свою энергию. При $\omega \rightarrow 0$ сечение излучения расходится, как $d\omega/\omega$; это — проявление общего правила, которое будет рассмотрено в § 98.

В нерелятивистском пределе ($p \ll m$) импульс фотона мал по сравнению с импульсом электрона, так как

$$\omega = \frac{p'^2 - p^2}{2m} \ll p.$$

¹⁾ Интегрирование по направлениям одного только вторичного электрона тоже может быть произведено в аналитическом виде — см. *Gluckstern R. L., Hull M. H.* // *Phys. Rev.* — 1953. — Vol. 90, — P. 1030.

Поэтому $q^2 \approx (p' - p)^2$. Положив в (93,8) $\varepsilon = \varepsilon' = m$, в пренебрежении всеми p, p', ω по сравнению с m , получим

$$d\sigma = \frac{2}{\pi} Z^2 \alpha^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{p' m^2}{p q^4} \sin \theta d\Omega \sin \theta' d\Omega' d\varphi \times \\ \times (p^2 \sin^2 \theta + p'^2 \sin^2 \theta' - 2pp' \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi),$$

или

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha^2}{\pi^2} \frac{p'}{p} [nq]^2 \frac{d\omega_\varepsilon d\omega'}{\varepsilon^4} \frac{d\omega}{\omega} \quad (93,10)$$

в согласии с формулой, полученной в борновском приближении в задаче 1 § 92. Соответственно и для спектрального распределения излучения получается известный уже нам результат (92,16)¹⁾.

В ультрарелятивистском случае, когда велики как начальная, так и конечная энергия электрона ($\varepsilon, \varepsilon' \gg m$), угловое распределение фотонов и вторичных электронов имеет очень специфический характер. При малых углах θ, θ' фигурирующие в знаменателях формулы (93,8) величины κ, κ' равны

$$\kappa \approx \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{m^2}{\varepsilon^2} + \theta^2 \right), \quad \kappa' \approx \frac{\varepsilon'}{2} \left(\frac{m^2}{\varepsilon'^2} + \theta'^2 \right) \quad (93,11)$$

и в области $\theta \lesssim m/\varepsilon$ становятся очень малыми. В этой области мала также и величина вектора q ($q \sim m$). Таким образом, в ультрарелятивистском случае фотон и вторичный электрон летят вперед в узком конусе с углом раствора $\sim m/\varepsilon$.

Количественную формулу для углового распределения в ультрарелятивистском случае легко получить из (93,8), подставив κ, κ' из (93,11), заменив во всех других местах p, p' на $\varepsilon, \varepsilon'$ и пренебрегая q^2 по сравнению с ε^2 . Введя удобные обозначения:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{m} \theta, \quad \delta' = \frac{\varepsilon'}{m} \theta', \quad (93,12)$$

представим эту формулу в виде.

$$d\sigma = \frac{8}{\pi} Z^2 \alpha^2 \frac{\varepsilon' m^2}{\varepsilon q^4} \frac{d\omega}{\omega} \delta d\delta \cdot \delta' d\delta' d\varphi \times \\ \times \left\{ \frac{\delta^2}{(1+\delta^2)^2} + \frac{\delta'^2}{(1+\delta'^2)^2} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon\varepsilon'} \frac{\delta^2 + \delta'^2}{(1+\delta^2)(1+\delta'^2)} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right) \frac{\delta\delta' \cos \varphi}{(1+\delta^2)(1+\delta'^2)} \right\}. \quad (93,13)$$

¹⁾ Получить эту формулу предельным переходом в (93,9), однако, довольно хлопотно ввиду взаимных сокращений ряда членов.

Написав $q^2 = [nq]^2 + (nq)^2$ ($n = k/\omega$), легко найти, что для малых углов

$$\frac{q^2}{m^2} = (\delta^2 + \delta'^2 - 2\delta\delta' \cos \varphi) + m^2 \left(\frac{1 + \delta^2}{2\varepsilon} - \frac{1 + \delta'^2}{2\varepsilon'} \right)^2. \quad (93,14)$$

При $\delta \sim \delta' \sim 1$ второй член здесь мал по сравнению с первым. Эти члены сравниваются в области еще меньших углов, где $\delta \sim m/\varepsilon$. Хотя здесь q становится в особенности малым ($q \sim m^2/\varepsilon \ll m$), интегральный вклад этой области в сечение все же мал по сравнению с вкладом всей области $\delta \leq 1$ (как легко видеть — в отношении m^2/ε^2). Но q может достигать значений $\sim m^2/\varepsilon$ также и при $\delta \sim \delta' \sim 1$, если при этом

$$|\delta - \delta'| \leq \frac{m}{\varepsilon}, \quad \varphi \leq \frac{m}{\varepsilon}. \quad (93,15)$$

Вклад этой области — того же порядка величины, что и все интегральное сечение (или даже является основным в нем — см. ниже).

Интегрирование формулы (93,13) по φ и по δ' дает угловое распределение фотонов (заданной частоты) безотносительно к направлениям вторичных электронов¹⁾:

$$d\sigma = 8Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{\delta \cdot d\delta}{(1 + \delta^2)^2} \times \\ \times \left\{ \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{4\delta^2}{(1 + \delta^2)^2} \right] \ln \frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + 2 - \frac{16\delta^2}{(1 + \delta^2)^2} \right] \right\}. \quad (93,16)$$

Проинтегрировав по δ , найдем спектральное распределение излучения в ультрарелятивистском случае:

$$d\sigma_\omega = 4Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \right) \left(\ln \frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2} \right) \quad (93,17)$$

(эту формулу можно, конечно, получить и непосредственно из (93,9)).

Обратим внимание на присутствие в (93,16) и (93,17) логарифма большой величины (даже при $\omega \sim \varepsilon$ отношение $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} \sim \frac{\varepsilon'}{m} \gg \gg 1$). Если она велика настолько, что велик даже ее логарифм, то в указанных формулах члены, содержащие логарифмы, становятся основными. Отметим, что этот логарифм происходит от

¹⁾ Сначала интегрируют по φ (в пределах от 0 до 2π). Интегрирование по δ' удобно заменить интегрированием по разности $|\Delta| = |\delta' - \delta|$, разбив его область на две части: от 0 до некоторого Δ_0 и от Δ_0 до ∞ , где Δ_0 удовлетворяет неравенствам $m/\varepsilon \ll \Delta_0 \ll 1$. В каждой области возможны соответствующие пренебрежения в подынтегральном выражении.

интегрирования по области (93,15)¹⁾. Таким образом, в логарифмическом приближении (т. е. в пренебрежении членами, не содержащими большого логарифма) вторичный электрон летит под углом $\sim (m/\varepsilon)^2$ к направлению падения.

Наконец, приведем предельную формулу для области вблизи жесткой границы спектра, когда ультрарелятивистский электрон излучает почти всю свою энергию: $\omega \approx \varepsilon \gg \varepsilon'$. Из (93,9) легко находим

$$d\sigma_{\omega} = 2Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\varepsilon} \left\{ \frac{\varepsilon'^2}{p'^2} \ln \frac{\varepsilon' + p'}{\varepsilon' - p'} - \frac{m^2 \varepsilon'}{4p'^3} \ln^2 \frac{\varepsilon' + p'}{\varepsilon' - p'} - \frac{\varepsilon'}{p'} \right\}. \quad (93,18)$$

Формулы (93,17—18) перекрывают весь интервал значений ω для ультрарелятивистского начального электрона; при $\omega \approx \varepsilon \gg \varepsilon' \gg m$ эти формулы совпадают. Если вторичный электрон нерелятивистский ($p' \ll m$), то

$$d\sigma_{\omega} = 2Z^2 \alpha r_e^2 \frac{\sqrt{2m(\varepsilon - \omega)}}{m} \frac{d\omega}{\varepsilon}. \quad (93,19)$$

Поляризационные эффекты

Поляризационные эффекты в тормозном излучении могут быть исследованы тем же общим методом, который был описан в § 65. Вопрос о выборе 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ в данном случае особенно прост. Поскольку процесс удобно рассматривать фактически лишь в одной определенной системе отсчета (системе покоя ядра), то достаточно положить $e^{(1)} = (0, \mathbf{e}^{(1)})$, $e^{(2)} = (0, \mathbf{e}^{(2)})$, где $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$ — перпендикулярные \mathbf{k} единичные векторы, из которых один лежит в плоскости \mathbf{k} , \mathbf{p} , а другой перпендикулярен ей.

Не будем приводить здесь ни самих довольно громоздких вычислений, ни их количественных результатов. Отметим лишь некоторые качественные свойства поляризационных эффектов²⁾. Эти свойства могут быть получены с помощью различных соотношений симметрии, подобно тому как это было сделано в § 87 для эффекта Комптона.

¹⁾ В этом легко убедиться, рассмотрев область интегрирования, в которой φ и $\Delta = \delta' - \delta$ удовлетворяют условиям: $m/\varepsilon \ll \Delta$, $\varphi \ll 1$. В этой области $q^2/m^2 \approx \Delta^2 + \varphi^2 \delta^2$, а выражение в фигурных скобках в (93,13) содержит члены, пропорциональные φ^2 или Δ^2 (при $\varphi = 0$ и $\Delta = 0$ оно обращается в нуль). Интегралы же вида

$$\int \frac{\varphi^2 d\varphi d\Delta}{(\Delta^2 + \delta^2 \varphi^2)^2} \quad \text{или} \quad \int \frac{\Delta^2 d\varphi d\Delta}{(\Delta^2 + \delta^2 \varphi^2)^2}$$

логарифмически расходятся; их «обрезание» происходит на границах указанной области значений переменных.

²⁾ Более подробное обсуждение этих эффектов можно найти в указанной на с. 414 обзорной статье *МакМастера*, а также в книге *Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С. Излучение релятивистских электронов*. — М.: Атомиздат, 1973.

Излагаемая теория отвечает первому не исчезающему приближению теории возмущений. В этом приближении сечение не может содержать члена, пропорционального одному лишь вектору поляризации начального (ξ) или конечного (ξ') электрона. Отсутствие члена $\propto \xi$ означает, что полное (просуммированное по поляризациям фотона и вторичного электрона) сечение излучения не зависит от поляризации падающего электрона.

Из числа членов, пропорциональных одним только поляризационным параметрам фотона (ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3), отсутствует член $\propto \xi'_2$. Это значит, что при излучении неполяризованным электроном фотон не обладает круговой поляризацией. Здесь имеется, однако, отличие от аналогичного результата для эффекта Комптона. В последнем случае такие члены были запрещены пространственной четностью в связи с невозможностью составления псевдоскаляра из единственных имевшихся в нашем распоряжении двух независимых векторов k, k' . В случае же тормозного излучения имеется три независимых импульса (p, p', k), что достаточно для построения псевдоскаляра ($k [pp']$). Член вида $\xi'_2(k [pp'])$ не противоречит пространственной четности и, строго говоря, отличен от нуля. Однако он не инвариантен по отношению к изменению знаков всех импульсов (ср. (87,26)) и потому отсутствует в первом борновском приближении.

Существование псевдоскаляра ($k [pp']$) приводит также к тому, что наряду с членом $\propto \xi'_3$ оказывается разрешенным в сечении также и член $\propto \xi'_1$ (в противоположность ситуации при эффекте Комптона). Этот член возникает как произведение вида

$$S_{\alpha\beta} v_{\alpha} [kv]_{\beta} (k [pp'])$$

(где $v = [kp]$), инвариантное как по отношению к пространственной инверсии, так и по отношению к изменению знака всех импульсов. Таким образом, излучаемый фотон обладает линейной поляризацией обоих видов (как в направлениях осей $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$, так и в «диагональных» направлениях, под углом 45° к этим осям). Это относится, однако, только к условиям, когда регистрируется также и направление вылета вторичного электрона. При интегрировании же по всем направлениям p' член $\propto \xi'_1$ в сечении обращается в нуль. Это очевидно из соображений симметрии: после интегрирования оба несовпадающих друг с другом «диагональных» направления становятся эквивалентными, и потому предпочтительная поляризация вдоль одной из них (как это имеет место при $\xi'_1 \neq 0$) невозможна.

Степень линейной поляризации не зависит от поляризационного состояния падающего электрона: корреляционные члены в сечении вида $\xi'_1 \xi$ и $\xi'_3 \xi$ запрещены в первом борновском при-

ближении. Член же $\xi_{2\beta}^{\prime\prime}$ разрешен, так что при излучении поляризованным электроном фотон обладает круговой поляризацией (Я. Б. Зельдович, 1952).

Экранирование

Полученные выше формулы выведены для чисто кулонова поля. Если же речь идет об излучении при столкновении не с «голым» ядром, а с атомом, то должна быть учтена экранировка поля ядра электронами, приводящая к уменьшению сечения. Для этого надо ввести в потенциал внешнего поля $A^{(e)}(q)$ атомный формфактор $F(q)$ (см. III, § 139). Согласно III (139,2) это достигается заменой Z на $Z - F(q)$. Выясним условия, при которых экранирование существенно.

Определенному значению q в формфакторе отвечают расстояния $r \sim 1/q$ в пространственном распределении электронных зарядов в атоме. Формфактор приближается к значению Z (полное экранирование) при $q \leq 1/a$, где a — размеры атома.

С другой стороны, в ультрарелятивистском случае существенный вклад в сечение излучения возникает, как мы видели выше, уже от области значений q вблизи того наименьшего значения, которое вообще может иметь q при заданных начальной и конечной энергиях электрона. В ультрарелятивистском случае

$$q_{\min} = p - p' - \omega = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2} - \sqrt{\varepsilon'^2 - m^2} - (\varepsilon - \varepsilon') \approx \frac{m^2 \omega}{2\varepsilon\varepsilon'}. \quad (93,20)$$

Экранирование существенно, если $q_{\min} \leq 1/a$ или

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} \geq \frac{a}{1/m}. \quad (93,21)$$

Это условие во всяком случае выполняется при достаточно больших энергиях падающего электрона.

Если $q_{\min} \ll 1/a$ («полная экранировка»), то с логарифмической точностью можно сразу выписать ответ для спектрального распределения излучения. Действительно, под знаком логарифма в (93,17) как раз стоит левая часть неравенства $\varepsilon\varepsilon'/m\omega \gg ma$. При соблюдении неравенства интеграл по dq , приводящий к этому логарифму, обрезается на значении порядка правой стороны неравенства. Согласно модели Томаса — Ферми $a \sim a_0 Z^{-1/3}$, где $a_0 \sim 1/me^2$ — боровский радиус (см. III, § 70); тогда $am \sim 1/aZ^{1/3}$. Таким образом, при полной экранировке логарифм в (93,17) следует заменить на $\ln(1/aZ^{1/3})$.

Потеря энергии

Потеря энергии электроном на излучение характеризуется «эффективным торможением»:

$$\kappa_{\text{изл}} = \int_0^{\varepsilon - m} \omega d\sigma_{\omega}. \quad (93,22)$$

Вычисление интеграла с $d\sigma_{\omega}$ из (93,17) приводит к следующему результату¹⁾:

$$\kappa_{\text{изл}} = Z^2 ar_e^2 \varepsilon \left\{ \frac{12\varepsilon^2 + 4m^2}{3\varepsilon p} \ln \frac{\varepsilon + p}{m} - \frac{(8\varepsilon + 6p)m^2}{3\varepsilon p^2} \ln^2 \frac{\varepsilon + p}{m} - \frac{4}{3} + \right. \\ \left. + \frac{2m^2}{\varepsilon p} F\left(\frac{2p(\varepsilon + p)}{m^2}\right) \right\}, \quad (93,23)$$

где $F(\xi)$ — функция Спенса, определенная согласно (131,19).

В нерелятивистском случае формула (93,23) переходит в

$$\kappa_{\text{изл}} = \frac{16}{3} Z^2 ar_e^2 m \quad (\text{н. р.}) \quad (93,24)$$

(использовано, что $F(\xi) \approx \xi$ при $\xi \ll 1$ — см. (131,23)). Это выражение можно, конечно, получить и непосредственным интегрированием нерелятивистской борновской формулы (92,16).

В ультрарелятивистском случае

$$\kappa_{\text{изл}} = 4Z^2 ar_e^2 \varepsilon \left(\ln \frac{2\varepsilon}{m} - \frac{1}{3} \right) \quad (\text{у. р.}) \quad (93,25)$$

(при $\xi \gg 1$ имеем $F(\xi) \approx \frac{1}{2} \ln^2 \xi$ — см. (131,20); оба члена с квадратом логарифма в (93,23) могут быть при этом опущены).

Отношение $\kappa_{\text{изл}}/\varepsilon$ называют также сечением потери энергии на излучение. При больших ε оно растет логарифмически. Это возрастание устраняется, однако, при учете экранирования. При полном экранировании $\kappa_{\text{изл}}/\varepsilon$ стремится к постоянному пределу $\approx 4Z^2 ar_e^2 \ln(1/\alpha Z^{1/3})$.

При столкновении с атомом некоторое излучение происходит не только на ядре, но и на электронах. Мы увидим ниже (см. § 97), что в ультрарелятивистском случае сечение излучения электрона на электроны отличается от сечения излучения на ядре лишь отсутствием множителя Z^2 . Поэтому наличие Z атомных электронов можно приближенно учесть заменой Z^2 на $Z(Z+1)$.

При прохождении через среду, содержащую N атомов на единицу объема, быстрый электрон теряет в среднем свою энергию

¹⁾ Хотя формула (93,17) вблизи верхнего предела неприменима, ввиду сходимости интеграла это несущественно.

на расстояниях порядка

$$l_{\text{рад}} \sim \frac{e}{N\chi_{\text{изл}}} \sim \left[Z^2 \alpha N r_e^2 \ln \frac{1}{\alpha Z^{1/3}} \right]^{-1}; \quad (93,26)$$

эту длину называют *радиационной*.

Длина когерентности

Формуле (93,20) можно дать и другое, более общее истолкование: для применимости полученных формул необходимо, чтобы внешнее поле, в котором движется электрон, мало менялось (в направлении движения) на расстояниях

$$l_{\text{ког}} \sim \frac{1}{q_{\text{min}}} \sim \frac{e e'}{m^2 \omega} \left(= \frac{e e'}{c^3 m^2 \omega} \right); \quad (93,27)$$

эту длину называют *длиной формирования* излучения или *длиной когерентности*¹⁾. Значение (93,27), полученное в борновском приближении, имеет в действительности (для ультрарелятивистских частиц) совершенно общий характер — легко получить его и в противоположном предельном случае квазиклассического движения. Действительно, из формулы (90,22)²⁾ сразу видно, что для излучения под малыми углами к направлению движения существенны времена

$$\tau \sim \frac{e'}{e \omega (1 - v)} \sim \frac{e' e}{m^2 \omega},$$

т. е. участок траектории с длиной $c\tau \sim l_{\text{ког}}$.

При заданной частоте ω длина когерентности растет с увеличением энергии электрона. Между тем формулы, полученные для тормозного излучения на отдельном изолированном атоме, могут быть справедливы для излучения при прохождении через среду лишь при условии, что на длине когерентности не происходит повторного излучения фотона или рассеяния электрона. Первое означает, что должно быть $l_{\text{ког}} \ll l_{\text{рад}}$. Но уже значительно раньше нарушается второе условие — на пути $\sim l_{\text{рад}}$ возникает многократное рассеяние электрона на ядрах атомов среды.

Для формулировки количественного условия вернемся к формуле (90,22) до того, как в показателе экспоненты произведено

¹⁾ Излагаемые соображения принадлежат М. Л. Тер-Микаэлян (1953).

²⁾ Вывод формулы (90,22) основан только на малости кривизны траектории и в этом смысле не связан с тем, что в § 90 рассматривалось конкретно магнитное поле.

интегрирование по времени, и запишем его в виде

$$-i \frac{\omega \varepsilon}{e^r} \int_{t_1}^{t_1+\tau} (1 - \nu v) dt \approx -\frac{i\omega \varepsilon}{e^r} \left\{ (1 - \nu) \tau + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_1+\tau} \theta^2 dt \right\}, \quad (93,28)$$

где θ — малый угол между ν и u , связанный с рассеянием на ядрах. При кулоновом рассеянии угол θ меняется малыми «порциями», так что изменение θ со временем имеет характер медленной «диффузии по углам». Средний квадрат отклонения электрона на пути $t - t_1 (= c(t - t_1))$

$$\bar{\theta}^2 \sim (t - t_1) / l_{\text{кул}}$$

где $l_{\text{кул}}$ — длина свободного пробега по отношению к кулоновым столкновениям. Для этого пробега имеем

$$\frac{1}{l_{\text{кул}}} \sim \frac{NZ^2 e^4}{\varepsilon} \ln \frac{\chi_{\text{max}}}{\chi_{\text{min}}},$$

где χ_{min} и χ_{max} — минимальный и максимальный углы рассеяния в одном столкновении, для которых рассеяние можно еще считать резерфордским (ср. X, § 41)¹⁾. Первый из них определяется атомными размерами a , на которых поле ядра экранируется: $\chi_{\text{min}} \sim 1/ra$. Большие же углы рассеяния ограничены (для ультрарелятивистского электрона) расстояниями порядка радиуса ядра R : $\chi_{\text{max}} \approx 1/pR$. Если положить $R \approx 1,5 \cdot 10^{-13} Z^{1/3}$ см $\sim r_e Z^{1/3}$, то получим

$$l_{\text{кул}} \sim \frac{\varepsilon^2}{NZ^2 e^4 \ln(1/aZ^{1/3})} \sim \frac{\alpha \varepsilon^2}{m^2} l_{\text{рад}}. \quad (93,29)$$

Второй член в (93,28), набегающий за время $\tau \sim l_{\text{ког}}$, оценивается теперь как

$$\bar{\theta}^2 \tau \sim \frac{\omega \varepsilon}{e^r} \frac{l_{\text{ког}}^2}{l_{\text{кул}}} \sim \frac{l_{\text{ког}}}{\alpha l_{\text{рад}}}.$$

Для применимости формул тормозного излучения, полученных без учета многократного рассеяния, этот член должен быть мал по сравнению с единицей. Отсюда находим условие

$$l_{\text{ког}} \ll \alpha l_{\text{рад}}, \quad (93,30)$$

более сильное, чем условие $l_{\text{ког}} \ll l_{\text{рад}}$ (Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, 1953).

¹⁾ Напомним, что длина пробега определяется транспортным сечением $\sigma_{\text{тр}} = \int (1 - \cos \chi) d\sigma(\chi)$. Для рассеяния ультрарелятивистских электронов на кулоновом центре сечение $d\sigma(\chi)$ дается формулой (80,10).