§ 94. Образование пар фотоном в поле ядра

Образование электрон-позитронной пары при столкновении фотона с ядром ($Z+\gamma\rightarrow Z+e^-+e^+$) и тормозное излучение при столкновении электрона с ядром ($Z+e^-\rightarrow Z+e^-+\gamma$) — два перекрестных канала одной и той же реакции. В § 91 были уже сформулированы правила, по которым преобразуются формулы при переходе от второго из этих случаев к первому. В данном случае, применив эти правила к формуле (93,8), получим следующее выражение для дифференциального сечения образования пары неполяризованным фотоном, усредненное по поляризациям компонент пары[1]):

$$d\sigma=-\frac{Z^2\alpha r_e^2}{2\pi}\frac{m^2p_+p_-d\varepsilon_+}{\omega^3q^4}\sin\theta_+\,d\theta_+\cdot\sin\theta_-\,d\theta_-\,d\varphi\times$$
$$\times\left\{\frac{p_+^2}{\varkappa_+^2}(4\varepsilon_-^2-q^2)\sin^2\theta_++\frac{p_-^2}{\varkappa_-^2}(4\varepsilon_+^2-q^2)\sin^2\theta_--\right.$$
$$-\frac{2\omega^2}{\varkappa_+\varkappa_-}(p_+^2\sin^2\theta_++p_-^2\sin^2\theta_-)-$$
$$\left.-\frac{2p_+p_-}{\varkappa_+\varkappa_-}(2\varepsilon_+^2+2\varepsilon_-^2-q^2)\sin\theta_+\sin\theta_-\cos\varphi\right\},\qquad(94,1)$$
$$\varkappa_\pm=\varepsilon_\pm-p_\pm\cos\theta_\pm,\quad q^2=(\mathbf{p}_++\mathbf{p}_--\mathbf{k})^2,\quad \varepsilon_++\varepsilon_-=\omega$$

(*H. A. Bethe*, *W. Heitler*, 1934).

Таким же преобразованием получим из (93,9) распределение компонент пары по энергиям:

$$d\sigma_{\varepsilon+}=Z^2\alpha r_e^2\frac{p_+p_-}{\omega^3}d\varepsilon_+\left\{-\frac{4}{3}-2\varepsilon_+\varepsilon_-\frac{p_+^2+p_-^2}{p_+^2p_-^2}+\right.$$
$$+m^2\left(l_-\frac{\varepsilon_+}{p_-^3}+l_+\frac{\varepsilon_-}{p_+^3}-l_+l_-\frac{1}{p_+p_-}\right)+$$
$$+L\left[-\frac{8\varepsilon_+\varepsilon_-}{3p_+p_-}+\frac{\omega^2}{p_+^3p_-^3}(\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2+p_+^2p_-^2-m^2\varepsilon_+\varepsilon_-)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{m^2\omega}{2p_+p_-}\left(l_+\frac{\varepsilon_+\varepsilon_--p_+^2}{p_+^3}+l_-\frac{\varepsilon_+\varepsilon_--p_-^2}{p_-^3}\right)\right]\right\},$$
$$L=\ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-+p_+p_-+m^2}{\varepsilon_+\varepsilon_--p_+p_-+m^2},\quad l_\pm=\ln\frac{\varepsilon_\pm+p_\pm}{\varepsilon_\pm-p_\pm}.\qquad(94,2)$$

Поскольку полученные формулы основаны на борновском приближении, они справедливы при условиях $Ze^2/v_\pm\ll1$. Отме-

[1]) О поляризационных эффектах в образовании пар фотоном см. ту же литературу, которая была указана в § 93 для тормозного излучения.

тим, что симметричность формул (94,1—2) по отношению к электрону и позитрону является следствием именно борновского приближения; она исчезла бы в более высоких приближениях.

В ультрарелятивистском случае ($\varepsilon_\pm \gg m$) электрон и позитрон вылетают под углами $\theta_\pm \sim m/\varepsilon_\pm$ к направлению падающего фотона. Угловое распределение дается формулой, аналогичной (93,13):

$$d\sigma = \frac{8}{\pi} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m^4 \varepsilon_+ \varepsilon_-}{\omega^3 q^4} d\varepsilon_+ \left\{ -\frac{\delta_+^2}{(1+\delta_+^2)^2} - \frac{\delta_-^2}{(1+\delta_-^2)^2} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon_+\varepsilon_-} \frac{\delta_+^2 + \delta_-^2}{(1+\delta_+^2)(1+\delta_-^2)} + \left(\frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-} + \frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+}\right) \frac{\delta_+\delta_- \cos\varphi}{(1+\delta_+^2)(1+\delta_-^2)} \right\} \delta_+\delta_- \cdot d\delta_+ d\delta_- \cdot d\varphi, \tag{94,3}$$

причем

$$\frac{q^2}{m^2} = \delta_+^2 + \delta_-^2 + 2\delta_+\delta_- \cos\varphi + m^2 \left(\frac{1+\delta_+^2}{2\varepsilon_+} + \frac{1+\delta_-^2}{2\varepsilon_-} \right)^2. \tag{94,4}$$

Распределение по энергиям в этом случае:

$$d\sigma = 4Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\varepsilon_+}{\omega^3} \left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_- \right) \left(\ln \frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\omega} - \frac{1}{2} \right) \text{ (у. р.)}. \tag{94,5}$$

Интегрирование этого выражения по ε_+ (в пределах от m до ω) дает полное сечение образования пар фотоном заданной энергии[1]):

$$\sigma = \frac{28}{9} Z^2 \alpha r_e^2 \left(\ln \frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42} \right), \quad \omega \gg m. \tag{94,6}$$

Как и для тормозного излучения, логарифмический член в сечении в ультрарелятивистском случае происходит от области значений $q \sim m^2/\varepsilon$. Этому соответствуют теперь углы, для которых

$$|\delta_+ - \delta_-| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}, \quad |\pi - \varphi| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}$$

(вместо $\varphi \lesssim m/\varepsilon$ в (93,15)). Таким образом, в логарифмическом приближении направления электрона и позитрона образуют обратно пропорциональные энергиям частиц малые углы с направлением фотона и лежат почти в одной плоскости с последним, но по разные стороны от него.

[1]) Ввиду сходимости интеграла у обоих пределов неприменимость формулы (94,5) при малых $\varepsilon_\pm - m$ несущественна.

Вблизи порога реакции ($\omega \to 2m$) борновское приближение неприменимо. Вывод количественной формулы в этом случае требовал бы точного учета кулонова взаимодействия трех заряженных частиц, имеющихся в конечном состоянии (ядро и пара). Симметрия по отношению к электрону (притягивающемуся к ядру) и к позитрону (отталкивающемуся от ядра) при этом, конечно, исчезает.

Если

$$Z\alpha \ll \sqrt{\frac{\omega - 2m}{\omega}} \ll 1, \tag{94,7}$$

то борновское приближение еще применимо. При нерелятивистских энергиях пары $\omega \approx 2m \gg p_{\pm}$, поэтому $q \approx \omega$. В (94,1) можно положить везде $\varepsilon_{\pm} = \varkappa_{\pm} = m$, $\omega = 2m$, после чего эта формула сводится к выражению

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha r_e^2}{64\pi^2}\frac{p_+p_-}{m^5}\left(p_+^2\sin^2\theta_+ + p_-^2\sin^2\theta_-\right)do_+\,do_-\,d\varepsilon_+. \tag{94,8}$$

После интегрирования по углам

$$d\sigma = \frac{1}{6}Z^2\alpha r_e^2\,\frac{p_+p_-\left(p_+^2 + p_-^2\right)}{m^5}\,d\varepsilon_+ =$$

$$= \frac{2Z^2\alpha r_e^2}{3m^3}(\omega - 2m)\sqrt{(\varepsilon_+ - m)(\varepsilon_- - m)}\,d\varepsilon_+. \tag{94,9}$$

Наконец, интегрируя по ε_+ (в пределах от m до $\omega - m$), получаем полное сечение

$$\sigma = \frac{\pi}{12}Z^2\alpha r_e^2\left(\frac{\omega - 2m}{m}\right)^3. \tag{94,10}$$

Если относительная скорость v_0 компонент рождающейся пары мала, то необходимо учесть их кулоново взаимодействие друг с другом (*А. Д. Сахаров*, 1948). Оно становится существенным, когда v_0 порядка (или меньше) скорости частицы в связанном состоянии электрона и позитрона (позитроний):

$$v_0 \lesssim \alpha. \tag{94,11}$$

Рассмотрим процесс в системе центра инерции пары. На диаграммах, изображающих процесс в этой системе, существенны виртуальные импульсы $\sim m$. Другими словами, существенны расстояния между электроном и позитроном $\sim 1/m$. Между тем волновая функция их относительного движения $\psi(r)$ существенно меняется лишь на расстояниях $r \sim 1/mv_0 \sim 1/m\alpha$, т. е. больших по сравнению с $1/m$. Поэтому учет взаимодействия частиц сведется к появлению в матричном элементе перехода множителя $\psi^*(0)$. Соответственно дифференциальное сечение умножится на $|\psi(0)|^2$, т. е. на

$$\frac{2\pi\alpha/v_0}{1-e^{-2\pi\alpha/v_0}} \tag{94,12}$$

(см. III(136,11)). Относительная скорость двух частиц есть скорость одной из них в системе покоя другой. Сравнив значения инварианта $p_{+\mu}p_-^{\mu}$ в этой системе и в лабораторной системе (системе покоя ядра), получим

$$\frac{m^2}{\sqrt{1-v_0^2}} = \varepsilon_+\varepsilon_- - \mathbf{p}_+\mathbf{p}_-,$$

откуда можно найти v_0. Если $\mathbf{p}_+$ и $\mathbf{p}_-$ близки друг к другу по абсолютному значению и направлению, то для v_0 получается приближенная формула

$$v_0^2 = \frac{p^2}{m^2}\vartheta^2 + \frac{(p_+-p_-)^2}{\varepsilon^2}, \tag{94,13}$$

применимая при $v_0 \ll 1$; здесь $p=(p_+ + p_-)/2$, $\varepsilon=(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)/2$, ϑ — угол между $\mathbf{p}_+$ и $\mathbf{p}_-$.

Поправка в сечении, определяемая формулами (94,12—13), приводит к появлению аномалии в корреляции между импульсами рождаемых электрона и позитрона: узкому максимуму при $\mathbf{p}_+ \approx \mathbf{p}_-$.

§ 95. Точная теория рождения пар в ультрарелятивистском случае

В двух предыдущих параграфах тормозное излучение и рождение пар фотоном в релятивистской области были изучены на основе борновского приближения, для чего во всяком случае требовалось выполнение условия $Z\alpha \ll 1$. В § 95, 96 излагается теория этих процессов, свободная от указанного ограничения, т. е. справедливая и при $Z\alpha \sim 1$ (*H. A. Bethe, L. Maximon*, 1954). При этом предполагается, что обе частицы (начальный и конечный электрон или компоненты пары) ультрарелятивистские; их энергия $\varepsilon \gg m$.

Мы видели, что в ультрарелятивистском случае обе частицы летят под малыми углами (θ, θ' или θ_+, θ_-) к направлению фотона: $\theta \lesssim m\varepsilon$. Такое свойство сохраняется и в точной (по $Z\alpha$) теории, и мы будем рассматривать именно эту область углов.

Передача импульса ядру в этой области: $q \sim m$. Это значит, что в волновых функциях существенны прицельные параметры $\rho \sim 1/q \sim 1/m$, т. е. «большие» расстояния. На таких расстоя-