Полное сечение образования пары фотоном с энергией ω:

$$\sigma = \frac{28}{9} Z^2 \alpha r_e^2 \left[\ln \frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42} - f(\alpha Z) \right]. \tag{95,21}$$

Мы видим, что в этих формулах изменения сводятся к вычитанию из логарифма универсальной функции атомного номера $f(\alpha Z)$. На рис. 18 дан график этой функции. При $\nu \ll 1$ $f(\nu) \approx \approx 1{,}2\nu^2$.

§ 96. Точная теория тормозного излучения в ультрарелятивистском случае

Матричный элемент для тормозного излучения

$$M_{fi} = \int \psi_{\varepsilon' p'}^{(-)*} (\alpha e^*) e^{-i\mathbf{kr}} \psi_{\varepsilon p}^{(+)} d^3x; \tag{96,1}$$

волновые функции начального $(\varepsilon, \mathbf{p})$ и конечного $(\varepsilon', \mathbf{p}')$ электронов содержат в своих асимптотиках соответственно выходящую и входящую сферические волны. Вычисление этого интеграла аналогично вычислению матричного элемента (95,2). Мы, однако, изложим здесь другой способ вычисления сечения тормозного излучения, основанный на квазиклассичности процесса и не использующий явного вида волновых функций электрона в поле ядра; в этом смысле метод не связан с конкретным видом потенциала поля (*В. Н. Байер, В. М. Катков*, 1968).

В процессе тормозного излучения ядро передает электрону и фотону импульс $\mathbf{q} = \mathbf{p}' + \mathbf{k} - \mathbf{p}$. Как и в задаче о рождении пар, надо различать две области значений передачи импульса $\mathbf{q}_\perp$, поперечной по отношению к $\mathbf{p}$:

$$\text{I)}\ m \gtrsim q_\perp \gg \omega m^2/\varepsilon^2, \qquad \text{II)}\ q_\perp \sim \omega m^2/\varepsilon^2 \ll m. \tag{96,2}$$

Очевидно, что в области I сечение испускания фотона дается своим борновским значением: для таких $\mathbf{q}_\perp$ изменение импульса отдачи ядра при излучении несущественно, как это будет показано в § 98 (см. вывод условия (98,10)). Поэтому в области I сечение процесса равно произведению точного сечения рассеяния электрона в поле неподвижного ядра и вероятности испускания фотона, не зависящей от вида поля. Но согласно (80,10) сечение рассеяния в кулоновом поле для малых углов совпадает со своим борновским значением. То же самое относится поэтому к сечению всего процесса в области I.

Таким образом, требует особого рассмотрения только область II. Малым передачам импульса отвечает прохождение электрона мимо ядра на больших прицельных расстояниях: $\rho \sim 1/q_\perp \gtrsim \varepsilon/m^2$. Но на таких расстояниях движение электрона заведомо квазиклассично, в чем легко убедиться простым применением обычного условия квазиклассичности III (46,7) к ультрарелятивистскому уравнению (39,5).

Квазиклассичность движения позволяет применить метод, использованный уже в § 90 для магнитотормозного излучения. При этом выражение (90,7) в данном случае представляет собой вероятность испускания при однократном прохождении электрона мимо ядра.

Для фигурировавшей в § 90 функции L остается в силе формула (90,18); единственное отличие состоит в форме квазиклассической траектории электрона $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, по которой вычисляется разность $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$.

На больших прицельных расстояниях поле ядра можно считать слабым. В нулевом приближении траектория представляет собой прямую, проходящую на расстоянии ρ от центра. В следующем приближении имеем уравнение движения (ср. I, § 20)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\frac{\boldsymbol{\rho}}{r}\frac{dU}{dr},$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — вектор в плоскости xy, перпендикулярной начальному импульсу электрона, а в качестве r в правой стороне уравнения следует взять функцию нулевого приближения:

$$r\approx\sqrt{\rho^2+v^2t^2}\approx\sqrt{\rho^2+t^2}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{p}(t)-\mathbf{p}_1=-\boldsymbol{\rho}\int\limits_{t_1}^{t}\frac{dU}{dt}\frac{dt}{r}. \qquad (96,3)$$

С достаточной точностью скорость $\mathbf{v}(t)=\mathbf{p}(t)/\varepsilon$ (где энергия ε зависит только от величины, но не от направления $\mathbf{p}$) можно считать постоянной. Еще одно интегрирование дает тогда

$$\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_1=\mathbf{v}_1(t-t_1)-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_1}^{t}[\mathbf{p}(t')-\mathbf{p}_1]\,dt'. \qquad (96,4)$$

Положим $t_1=-\infty$, так что величины $\mathbf{p}_1=\mathbf{p}(-\infty)\equiv\mathbf{p}$ и $\mathbf{v}=\mathbf{p}/\varepsilon$ будут начальными импульсом и скоростью электрона.

Представим вероятность (90,7) в виде

$$dw=|a(\boldsymbol{\rho})|^2\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \qquad (96,5)$$

где

$$a(\boldsymbol{\rho})=e\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(t)\exp\left\{i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}[\omega t-\mathbf{kr}(t)]\right\}dt, \qquad (96,6)$$

$$R(t)=\frac{u^*_{\varepsilon'\mathbf{p}'}}{\sqrt{2\varepsilon'}}(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}^*)\frac{u_{\varepsilon\mathbf{p}}}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

Здесь $\varepsilon' = \varepsilon - \omega$, $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{k}$. Классическая функция $\mathbf{p}(t)$ дается формулой (96,3). Если $\mathbf{p}$ — начальный импульс электрона, то для кулонова поля ($U = -\nu/r$, $\nu = Z\alpha$) имеем

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p} - \frac{\nu\boldsymbol{\rho}}{\rho^2}\left[\frac{t}{\sqrt{\rho^2 + t^2}} + 1\right],$$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{p}}{\varepsilon}t - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^2}\frac{\nu}{\varepsilon}\left[\sqrt{\rho^2 + t^2} + t\right].$$

Введя передачу импульса в классическом рассеянии

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{p}(\infty) - \mathbf{p}(-\infty) = -2\boldsymbol{\rho}\nu/\rho^2, \tag{96,7}$$

можно переписать эти формулы как

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}\left[\frac{t}{\sqrt{t^2 + \rho^2}} + 1\right], \\ \mathbf{r}(t) &= \left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}\right)\frac{t}{\varepsilon} + \frac{\boldsymbol{\Delta}}{2\varepsilon}\sqrt{t^2 + \rho^2}. \end{aligned} \tag{96,8}$$

Используя теперь формулу (90,20) для $R(t)$ и выражения (96,8) для $\mathbf{p}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$, можно произвести интегрирование по времени в (96,6). Оно осуществляется введением переменной

$$\xi = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\left[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t)\right]$$

вместо t и использованием формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{-i\xi}\,d\xi}{\sqrt{\chi^2 + \xi^2}} = 2i\chi K_1(\chi),$$

где K_1 — функция Макдональда. В полном проведении этого вычисления, однако, нет необходимости, поскольку нам требуется выражение $a(\boldsymbol{\rho})$ лишь для малых значений независимого параметра Δ ($\Delta \ll m$). В этом случае находим

$$a(\boldsymbol{\rho}) = w_f^*\mathbf{D}w_i \cdot \boldsymbol{\Delta}\chi K_1(\chi), \tag{96,9}$$

где

$$\chi = \rho\frac{\omega\varepsilon}{\varepsilon'}(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}),$$

$\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, а $\mathbf{D}$ — некоторая функция $\mathbf{p}$, ε и $\mathbf{k}$ (но не $\boldsymbol{\rho}$), причем ее точный вид несуществен [1]). Поскольку в ультрарелятивистском

---

[1]) Спиноры w_i и w_f можно считать при интегрировании постоянными, т. е. можно пренебречь изменением поляризации электрона при его классическом ультрарелятивистском движении. Это следует из уравнений, полученных в § 41.

случае фотон испускается под малым углом θ к направлению скорости электрона, имеем

$$\chi \approx \rho \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \omega \left(1 - v + \frac{\theta^2}{2}\right),$$

или

$$\chi = \rho \frac{\omega m^2}{2\varepsilon\varepsilon'} (1 + \delta^2), \qquad \delta = \frac{\theta\varepsilon}{m}. \tag{96,10}$$

Уже было упомянуто, что (96,5) есть вероятность испускания фотона при однократном прохождении электрона мимо ядра на прицельном расстоянии ρ. Сечение испускания фотона с заданными частотой и направлением получается умножением этой вероятности на $d\rho_x d\rho_y / v \approx d\rho_x d\rho_y \equiv d^2\rho$ и интегрированием по прицельным параметрам:

$$d\sigma = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int |a(\rho)|^2 d^2\rho. \tag{96,11}$$

Не следует, однако, думать, что эта формула без интегрирования по $d^2\rho$ дала бы также и распределение конечных электронов по направлениям. Отклонение электрона при его движении по классической орбите однозначно определяется внешним полем и заведомо не совпадает с неопределенным квантовомеханическим отклонением (а предельное значение $\mathbf{p}'(\infty)$ классической функции $\mathbf{p}'(t)$ не совпадает поэтому с реальным конечным значением импульса электрона). Для нахождения этого распределения необходимо, следовательно, переразложить волновую функцию электронов по плоским волнам.

Как видно из (96,11), $a(\rho)$ есть амплитуда испускания фотона при столкновении на прицельном расстоянии ρ. Но выражения (96,5—6) определяют эту амплитуду лишь с точностью до фазового множителя. Последний есть, очевидно, $e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}$, — ввиду наличия не зависящего от времени члена $\mathbf{r}_\perp(\infty) = \boldsymbol{\rho}$ в $\mathbf{r}(t)$, этот постоянный множитель должен присутствовать в $V_{fi}(t)$ и может быть вынесен из-под знака интеграла. Поскольку он не является оператором, он не затрагивается операциями коммутирования и, таким образом, амплитуда процесса испускания есть

$$e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} a(\rho), \tag{96,12}$$

где $a(\rho)$ дается выражением (96,9).

Пусть электрон описывается при $z \to -\infty$ плоской волной с импульсом $\mathbf{p}$, направленным вдоль оси z. Это значит, что волновая функция электрона при $z \to -\infty$ не зависит от x и y и сводится к постоянной, которую можно положить равной 1.

Тогда волновая функция электрона, прошедшего через поле, при $z \to \infty$ есть [1])

$$\psi(\infty) = S(\rho) = \exp\left\{-i \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z)\, dz\right\}. \tag{96,13}$$

С другой стороны, по смыслу амплитуды перехода (96,12) волновая функция электрона, прошедшего через поле и испустившего фотон, есть

$$e^{-i\mathbf{k}\rho} a(\rho) S(\rho). \tag{96,14}$$

Амплитуда же процесса испускания фотона, в котором электрон остается в состоянии с определенным импульсом $\mathbf{p}'$, дается соответствующей фурье-компонентой функции (96,14), т. е.

$$a(\mathbf{q}_\perp) = \int e^{-i\mathbf{p}'\rho} e^{-i\mathbf{k}\rho} a(\rho) S(\rho)\, d^2\rho = \int e^{-i\mathbf{q}_\perp\rho} a(\rho) S(\rho)\, d^2\rho, \tag{96,15}$$

где $\mathbf{q}_\perp$ — поперечная компонента вектора передачи импульса ядру (ср. III (131,7)). Сечение же рассеяния с заданным значением $\mathbf{q}_\perp$ есть

$$d\sigma = |a(\mathbf{q}_\perp)|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^2q_\perp}{(2\pi)^2}. \tag{96,16}$$

Вычислим теперь $S(\rho)$. В рассматриваемом случае кулонова поля интеграл в экспоненте расходится, в соответствии с расходимостью фазы в кулоновом рассеянии. Поэтому интеграл надо брать между конечными пределами:

$$\int_{-R}^{R} U\, dz = -2\nu \int_0^R \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = -2\nu\left[\ln\left(R + \sqrt{R^2 + \rho^2}\right) - \ln\rho\right] \approx$$
$$\approx -2\nu \ln R + 2\nu \ln \rho$$

($R \gg \rho$). Первый, постоянный, член не существен, так что

$$S(\rho) = \exp(-2i\nu \ln\rho) = \rho^{-2i\nu}. \tag{96,17}$$

Подставляя (96,9), (96,17) в (96,15) и интегрируя по направлениям вектора ρ в плоскости xy, находим

$$a(\mathbf{q}_\perp) \propto \nu \int_0^\infty \rho^{-2i\nu} K_1(\chi) J_1(q_\perp\rho)\, \rho\, d\rho, \tag{96,18}$$

[1]) Ср. III (131,4). Мы имеем при этом в виду аналогию между уравнением (39,5) (в котором полагаем $\mathbf{p}^2 \approx \varepsilon^2$) и нерелятивистским уравнением Шредингера (39,5а). Учитывая различие коэффициентов в этих уравнениях, легко видеть, что в нашем случае условие III (131,1) применимости уравнения III (131,4) действительно удовлетворяется. Тот факт, что эта формула не относится к области сколь угодно больших z, не существен по тем же причинам, что и в III, § 131.

где J_1 — функция Бесселя. Множители, не содержащие $\nu = Z\alpha$, здесь не выписаны.

Мы видим, что зависимость амплитуды $a(\mathbf{q}_\perp)$ (а следовательно, и сечения (96,16)) от ν содержится в отдельном множителе. С другой стороны, при $\nu \to 0$ сечение должно стремиться к своему борновскому значению. Поэтому ясно, что сечение будет отличаться от борновского лишь множителем, который не зависит от поляризации электрона и не влияет на поляризационные эффекты.

Интеграл (96,18) может быть выражен через гипергеометрическую функцию с помощью формулы

$$\int_0^\infty x^{-\lambda} K_1(ax) J_1(bx)\, x\, dx =$$

$$= \frac{b\Gamma(2-\lambda/2)\,\Gamma(1-\lambda/2)}{2^\lambda a^{3-\lambda}} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{-1+\lambda/2} F\left(\frac{\lambda}{2},\ 1 - \frac{\lambda}{2},\ 2,\ \frac{b^2}{a^2+b^2}\right).$$

Это дает

$$a(\mathbf{q}_\perp) \infty \nu(1-i\nu)\left(\frac{q}{2}\right)^{2i\nu} \Gamma^2(1-i\nu)\, F(i\nu,\ 1-i\nu,\ 2,\ z), \qquad (96,19)$$

где

$$z = 1 - \frac{m^4\omega^2}{4q^2\varepsilon^2\varepsilon'^2}(1+\delta^2)^2, \qquad \delta = \frac{\varepsilon\theta}{m}; \qquad (96,20)$$

здесь использовано, что в области II (см. (96,2)) параллельная $\mathbf{p}$ компонента вектора $\mathbf{q}$

$$q_\parallel^2 = q^2 - \mathbf{q}_\perp^2 \approx \frac{m^4\omega^2}{4\varepsilon^2\varepsilon'^2}(1+\delta^2)^2. \qquad (96,21)$$

В этом легко убедиться, если учесть, что в указанной области углы между импульсами $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{k}$ удовлетворяют условиям (93,15).

Гипергеометрическая функция в (96,19) может быть сведена к функции $F(z)$ (95,15) с помощью формулы

$$F(a,\ b+1,\ c+1,\ z) = \frac{c}{c-a} F(a,\ b,\ c,\ z) + \frac{c(1-z)}{b(a-c)} F'(a,\ b,\ c,\ z).$$

Окончательный результат представится тогда в виде

$$d\sigma = d\sigma_{\text{Б}} \frac{1}{F^2(1)}\left[F^2(z) + \frac{(1-z)^2}{\nu^2} F'^2(z)\right], \qquad (96,22)$$

где $d\sigma_{\text{Б}}$ — борновское сечение (93,13) (*H. A. Bethe*, *L. Maximon*, 1954). При $q \gg m^2/\varepsilon$ имеем $z \approx 1$, так что весь коэффициент при $d\sigma_{\text{Б}}$ стремится к единице. В этом смысле формула (96,22), выведенная для области II, автоматически справедлива при всех $q \lesssim m$. Когда $q \lesssim m^2/\varepsilon$ и поправочный множитель в (96,22) отличен от единицы, векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{k}$ почти компланарны и величины δ и δ' почти равны друг другу; это уже было учтено в (96,22). Таким образом, q в выражении (96,20) для z может быть переписано как

$$\frac{q^2}{m^2} = \delta^2 + \delta'^2 - 2\,\delta\delta'\cos\varphi + \frac{m^2\omega^2}{4\varepsilon^2\varepsilon'^2}(1+\delta^2)^2, \qquad (96,23)$$

т. е. можно положить $\delta = \delta'$ во втором члене в (93,14), но не в первом члене, который не содержит малого коэффициента $(\sim m^2/\varepsilon^2)$.

Для нахождения интегрального (по углам) сечения излучения нет необходимости производить интегрирование заново, как это ясно из следующих рассуждений (*H. Olsen*, 1955). Различные направления $\mathbf{p}'$ (при заданной энергии ε') отвечают вырождению конечного состояния электрона. Очевидно, что результат суммирования по состояниям, относящимся к одному вырожденному уровню, не зависит от того, каким образом будет выбран полный набор этих состояний. Мы можем поэтому воспользоваться для целей суммирования по направлениям $\mathbf{p}'$ системой функций $\psi^{(+)}_{\varepsilon'\mathbf{p}'}$ вместо системы $\psi^{(-)}_{\varepsilon'\mathbf{p}'}$ (необходимой для вычисления дифференциального сечения), т. е. определить матричный элемент тормозного излучения как

$$M_{fi}^{\text{торм}} = \int \psi^{(+)*}_{\varepsilon'\mathbf{p}'}(\alpha\mathbf{e}^*)\,e^{-i\mathbf{kr}}\psi^{(+)}_{\varepsilon\mathbf{p}}\,d^3x.$$

Легко убедиться, что этот интеграл совпадает с интегралом $(M_{fi}^{\text{пар}})^*$, если в последнем заменить параметры волновых функций согласно

$$\mathbf{p}_+,\ p_+,\ \varepsilon_+ \to -\mathbf{p},\ -p,\ -\varepsilon;\ \mathbf{p}_-,\ p_-,\ \varepsilon_- \to \mathbf{p}',\ p',\ \varepsilon';\ \mathbf{k} \to -\mathbf{k}$$

(а также заменить переменные интегрирования: $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$).

Отсюда ясно, что интегральное (по углам) сечение тормозного излучения можно получить из интегрального сечения образования пары (95,20), умножив последнее на

$$\frac{\omega^2}{p_+^2}\frac{d\omega}{d\varepsilon_+} \approx \frac{\omega^2}{\varepsilon_+^2}\frac{d\omega}{d\varepsilon_+}$$

(ср. (91,6)) и заменив $\varepsilon_+ \to -\varepsilon$, $\varepsilon_- \to \varepsilon'$. Таким образом, найдем

$$d\sigma = 4Z^2\alpha r_e^2\,\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{2}{3}\right)\left[\ln\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2} - f(\alpha Z)\right]\frac{d\omega}{\omega}. \qquad (96,24)$$

Мы видим, что поправки к борновским формулам для интегральных сечений тормозного излучения и образования пары даются одной и той же функцией $f(\alpha Z)$.

Формула (96,24), не связанная с какими-либо ограничениями на величину $Z\alpha$, допускает переход к классическому пределу: $\hbar \to 0$, $Z\alpha \to \infty$. В этом пределе надо также положить $\varepsilon \approx \varepsilon'$.

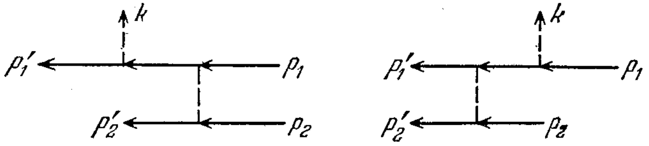
Имея в виду асимптотическое выражение $\Psi(z) \approx \ln z$ при $|z| \to \infty$ и значение $\Psi(1) = -C$ (C — постоянная Эйлера), находим для эффективного торможения

$$\hbar\omega\, d\sigma = \frac{16Z^2 r_e^2 e^2}{3c}\left[\ln\frac{2\varepsilon^2}{mc\omega Z e^2} - \frac{1}{2} - C\right] d\omega. \qquad (96,25)$$

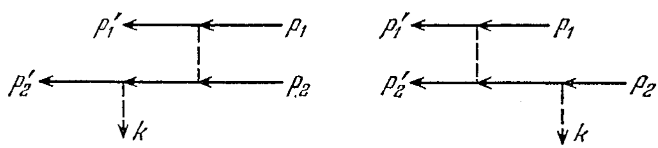
Это выражение, не содержащее $\hbar$, есть классическое спектральное распределение интенсивности тормозного излучения.

§ 97. Тормозное излучение электрона на электроне в ультрарелятивистском случае

Тормозное излучение электрона на электроне изображается восемью диаграммами Фейнмана: четырьмя диаграммами



(97,1а)



(97,1б)

и четырьмя «обменными» диаграммами, получающимися из изображенных перестановкой p_1' и p_2'. Мы приведем здесь результаты вычислений для ультрарелятивистского случая (*G. Altarelli, F. Buccella*, 1964; *В. Н. Байер, В. С. Фадин, В. А. Хозе*, 1966)[1].

В лабораторной системе отсчета (система покоя одного из начальных электронов, — скажем, второго) интегральное по направлениям фотона сечение излучения может быть представлено в виде суммы $d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)}$, где

$$d\sigma^{(1)} = 4\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega}\frac{\varepsilon-\omega}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\omega} + \frac{\varepsilon-\omega}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\right)\left(\ln\frac{2\varepsilon(\varepsilon-\omega)}{m\omega} - \frac{1}{2}\right); \qquad (97,2)$$

$$d\sigma^{(2)} = \frac{2}{3}\alpha r_e^2 \frac{m\,d\omega}{\omega^2}\left\{\left(4 - \frac{m}{\omega} + \frac{m^2}{4\omega^2}\right)\ln\frac{2\varepsilon}{m} - 2 + \frac{2m}{\omega} - \frac{5m^2}{8\omega^2}\right\}$$

$$\text{при} \quad \omega \geqslant \frac{m}{2}; \qquad (97,3)$$

---

[1]) Соответствующие вычисления можно найти в указанной на с. 457 книге *Байера, Каткова* и *Фадина*.