

Имея в виду асимптотическое выражение $\Psi(z) \approx \ln z$ при $|z| \rightarrow \infty$ и значение $\Psi(1) = -C$ (C — постоянная Эйлера), находим для эффективного торможения

$$\hbar\omega d\sigma = \frac{16Z^2 r_e^2 e^2}{3c} \left[\ln \frac{2\varepsilon^2}{m c \omega Z e^2} - \frac{1}{2} - C \right] d\omega. \quad (96,25)$$

Это выражение, не содержащее \hbar , есть классическое спектральное распределение интенсивности тормозного излучения.

§ 97. Тормозное излучение электрона на электроны в ультрарелятивистском случае

Тормозное излучение электрона на электроны изображается восемью диаграммами Фейнмана: четырьмя диаграммами

$$(97,1a)$$

$$(97,1b)$$

и четырьмя «обменными» диаграммами, получающимися из изображенных перестановкой p_1' и p_2' . Мы приведем здесь результаты вычислений для ультрарелятивистского случая (*G. Altarelli, F. Vucella, 1964; В. Н. Байер, В. С. Фадин, В. А. Хозе, 1966*)¹⁾.

В лабораторной системе отсчета (система покоя одного из начальных электронов, — скажем, второго) интегральное по направлениям фотона сечение излучения может быть представлено в виде суммы $d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)}$, где

$$d\sigma^{(1)} = 4\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \omega} + \frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \right) \left(\ln \frac{2\varepsilon(\varepsilon - \omega)}{m\omega} - \frac{1}{2} \right); \quad (97,2)$$

$$d\sigma^{(2)} = \frac{2}{3} \alpha r_e^2 \frac{m d\omega}{\omega^2} \left\{ \left(4 - \frac{m}{\omega} + \frac{m^2}{4\omega^2} \right) \ln \frac{2\varepsilon}{m} - 2 + \frac{2m}{\omega} - \frac{5m^2}{8\omega^2} \right\} \\ \text{при } \omega \geq \frac{m}{2}; \quad (97,3)$$

¹⁾ Соответствующие вычисления можно найти в указанной на с. 457 книге *Байера, Каткова и Фадина*.

$$d\sigma^{(2)} = \frac{2}{3} ar_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \left\{ 8 \left(1 - \frac{\omega}{m} + \frac{\omega^2}{m^2} \right) \ln \frac{e}{\omega} - \left(1 - \frac{2\omega}{m} \right) \ln \left(1 - \frac{2\omega}{m} \right) \right\} \times \\ \times \left[\frac{m^3}{4\omega^3} - \frac{m^2}{2\omega^2} + \frac{3m}{\omega} - 2 + \frac{4\omega}{m} \right] - \frac{m^2}{2\omega^2} + \frac{3m}{2\omega} - 2 + \frac{2\omega}{m} - \frac{4\omega^2}{m^2} \} \\ \text{при } \omega \leq \frac{m}{2} \quad (97,4)$$

(e — начальная энергия первого электрона).

Точность этих формул — до членов относительного порядка m/e . С этой точностью оказывается, что вклады в сечение от различных диаграмм не интерферируют друг с другом, и в этом смысле $d\sigma^{(1)}$ и $d\sigma^{(2)}$ отвечают излучению каждым из двух электронов — соответственно быстрым электроном и электроном отдачи (диаграммы (97,1a) и (97,16)).

Диаграммы обменного типа дают такой же вклад в сечение, как и диаграммы «прямые». В силу тождественности электронов суммарный вклад прямых и обменных диаграмм следует разделить на 2; поэтому можно рассматривать только вклад прямых диаграмм и не учитывать тождественности частиц. Для столкновения же электрона с позитроном вместо обменных фигурируют аннигиляционные диаграммы. Их вклад, однако, оказывается относительного порядка m/e , т. е. пренебрежим. Поэтому с указанной точностью сечения тормозного излучения при столкновениях электрона с электроном и с позитроном одинаковы.

При $\omega \gg m$ отношение

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{d\sigma^{(1)}} \sim \frac{m}{\omega} \ll 1,$$

т. е. излучение электроном отдачи мало по сравнению с излучением быстрым электроном (когда это отношение достигает порядка m/e , формула (97,3), разумеется, теряет смысл). Напротив, при $\omega \ll m$ обе части сечения почти сравниваются:

$$d\sigma^{(1)} = \frac{16}{3} ar_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{2e^2}{m\omega}, \quad d\sigma^{(2)} = \frac{16}{3} ar_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \ln \frac{e}{\omega}, \quad \omega \ll m. \quad (97,5)$$

Для справедливости формул (97,2—5) необходимо, чтобы хоть один из электронов после излучения оставался ультрарелятивистским. Другими словами, частота фотона должна быть достаточно далека от жесткой границы спектра, т. е. от максимальной частоты ω_{\max} , которая может быть излучена. Конечная энергия электронов будет минимальна, а энергия фотона максимальна, когда оба электрона движутся после излучения в направлении фотона и имеют одинаковые скорости. Тогда из законов сохранения имеем

$$e + m = \omega_{\max} + 2e', \quad |p| = \omega_{\max} + 2|p'|.$$

Исключив отсюда ε' и p' , получим

$$(\varepsilon + m - \omega_{\max})^2 - (|p| - \omega_{\max})^2 = 4m^2,$$

откуда

$$\omega_{\max} = \frac{m(\varepsilon - m)}{m + \varepsilon - |p|}. \quad (97,6)$$

При $\varepsilon \gg m$ имеем $\omega_{\max} \approx \varepsilon$. Таким образом, формулы (97,2—4) справедливы при условии

$$\omega_{\max} - \omega \sim \varepsilon - \omega \gg m. \quad (97,7)$$

Сечение излучения быстрым электроном (97,2) в точности совпадает с сечением излучения электрона на ядре с $Z = 1$ (формула (93,17)). Это совпадение не случайно, и его причины выясняются из анализа роли отдачи в процессе излучения.

При выводе формулы (93,17) мы пренебрегли отдачей неподвижной частицы (ядра) — изменили ее постоянным внешним полем. Это сводится к пренебрежению временной компонентой 4-вектора передачи импульса $q = p' - p + k$ (энергией отдачи). Покажем, что в ультрарелятивистском случае такое пренебрежение допустимо при излучении электроном не только на ядре, но и на электроне.

Напишем q^2 в виде

$$-q^2 = -(\varepsilon' + \omega - \varepsilon)^2 + (p'_{\parallel} + \omega - p_{\parallel})^2 + (p'_{\perp} - p_{\perp})^2, \quad (97,8)$$

где нижние индексы указывают компоненты векторов p' и p (начальный и конечный импульсы электрона), параллельные и перпендикулярные направлению фотона k . В ультрарелятивистском случае углы θ и θ' (между k и соответственно p и p') малы: $\theta \leq m/\varepsilon$, $\theta' \leq m/\varepsilon'$. Поэтому

$$|p_{\perp}| \sim |p|\theta \sim m, \quad p_{\parallel} \approx |p| - \frac{p_{\perp}^2}{2|p|} \approx \varepsilon - \frac{m^2}{2\varepsilon} - \frac{p_{\perp}^2}{2\varepsilon}, \quad (97,9)$$

и аналогично для p'_{\perp} , p'_{\parallel} .

Без учета отдачи имеем $\varepsilon' + \omega - \varepsilon = 0$; разность $p'_{\parallel} + \omega - p_{\parallel} \sim m^2/\varepsilon$, так что

$$-q^2 \approx (p'_{\perp} - p_{\perp})^2 \sim m^2. \quad (97,10)$$

Энергия отдачи (на электроне):

$$q_0 = \varepsilon' + \omega - \varepsilon \sim q^2/2m \sim m. \quad (97,11)$$

Изменением же p'_{\perp} из-за изменения ε' можно пренебречь. Поэтому первые два члена в (97,8) дают изменение q^2 при учете

отдачи; обозначим его Δq^2 . Используя (97,9), получаем

$$\Delta q^2 \approx (\varepsilon' + \omega - \varepsilon) \left(-\frac{m^2}{\varepsilon'} - \frac{p_{\perp}^2}{\varepsilon'} + \frac{m^2}{\varepsilon} + \frac{p_{\perp}^2}{\varepsilon} \right) \sim m^2 \frac{m}{\varepsilon}.$$

Сравнив с (97,10), мы увидим, что $\Delta q^2 \ll |q^2|$, чем и оправдывается пренебрежение отдачей¹⁾.

Тот факт, что быстрая частица излучает в узкий конус (с углом раствора $\sim m/\varepsilon$) в направлении своего движения, позволяет получить сечение излучения в системе центра инерции путем простого пересчета сечения (97,2) из лабораторной системы²⁾.

В системе центра инерции оба электрона излучают одинаково, каждый в направлении своего движения (это обстоятельство наглядно объясняет причину отсутствия интерференции между излучениями обеих частиц). Энергия ультрарелятивистского электрона в системе центра инерции связана с его энергией ε в лабораторной системе соотношением $2E^2 = m\varepsilon$, а частоты Ω и ω фотона в этих системах — соотношением $\omega/\varepsilon = \Omega/E$ (эти равенства легко получить, сравнивая значения инвариантов $(p_1 p_2)$ и $(p_1 k)$ в обеих системах). Поэтому для сечения излучения каждым из электронов в системе центра инерции находим

$$\begin{aligned} d\sigma^{(1)} &= d\sigma^{(2)} = \\ &= 4\alpha r_e^2 \frac{d\Omega}{\Omega} \frac{E - \Omega}{E} \left(\frac{E}{E - \Omega} + \frac{E - \Omega}{E} - \frac{2}{3} \right) \left(\ln \frac{4E^2(E - \Omega)}{m^2 \Omega} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (97,12)$$

Для применимости (97,12) также необходимо, чтобы частота фотона не была близка к границе спектра. Для ультрарелятивистской частицы указанное выше преобразование прямо дает из $\omega_{\max} \approx \varepsilon$

$$\Omega_{\max} \approx \omega_{\max} E/\varepsilon \approx E. \quad (97,13)$$

Таким образом, в системе центра инерции электроны могут излучить лишь половину своей полной энергии $2E$. Прямое вычисление Ω_{\max} легко произвести, заметив, что после излучения такого фотона электроны будут двигаться (в той же системе) с одинаковыми скоростями в направлении, обратной направлению фотона. Имеем

$$2E = 2E' + \Omega_{\max}, \quad 2|p'| = \Omega_{\max},$$

¹⁾ Это заключение, разумеется, тем более справедливо для излучения электроном на ядре, для которого энергия отдачи $q_0 \approx q^2/2M \sim m^2/M$, где M — масса ядра.

²⁾ В общем случае такой пересчет невозможен, поскольку вклад в спектр в заданном интервале частот $d\omega$ возникает от фотонов, излученных в существенно различных направлениях.

откуда

$$\Omega_{\max} = \frac{p^2}{E} = E - \frac{m^2}{E}, \quad (97,14)$$

и в ультрарелятивистском случае снова получаем (97,13). Таким образом, формула (97,12) применима при условии

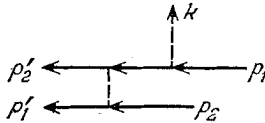
$$\Omega_{\max} - \Omega \sim E - \Omega \gg m. \quad (97,15)$$

Приведем теперь формулы для излучения в системе центра инерции в обратном предельном случае, вблизи границы спектра, когда ¹⁾

$$\Omega_{\max} - \Omega \ll m. \quad (97,16)$$

Поскольку в этом случае отдача весьма существенна, результаты отличаются от случая рассеяния на неподвижном центре и оказываются различными для электрон-электронного и электрон-позитронного рассеяния (В. Н. Байер, В. С. Фадин, В. А. Хозе, 1967).

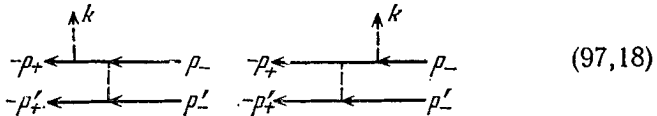
В случае рассеяния электрона на электроне, кроме квадратов диаграмм (97,1), вклад в сечение излучения вблизи границы спектра дают также произведения (интерференционные члены) прямых и обменных диаграмм, в которых излучает одна и та же начальная частица, например произведение второй из диаграмм (97,1a) и диаграммы



Это связано с тем, что вблизи границы конечные частицы имеют близкие импульсы и нет причин для малости обменных членов. Окончательный ответ для сечения:

$$d\sigma = 2\alpha r_e^2 \frac{[E(\Omega_{\max} - \Omega)]^{1/2}}{m} \frac{d\Omega}{\Omega_{\max}}. \quad (97,17)$$

При рассеянии электрона на позитроне логарифмически большой вклад в сечение излучения вносят квадраты аннигиляционных диаграмм, в которых излучают начальные частицы:



¹⁾ Разумеется, полученный в борновском приближении результат пригоден, как обычно, лишь до тех пор, пока относительная скорость конечных электронов велика по сравнению с α . В противном случае следует учитывать взаимодействие частиц в конечном состоянии.

С нелогарифмической точностью существенны также и квадраты других диаграмм. Интерференционные же члены малы. Окончательный ответ:

$$d\sigma = 2\alpha r_e^2 \frac{[E(\Omega_{\max} - \Omega)]^{1/2}}{m} \left(\ln \frac{2E}{m} + 1 \right) \frac{d\Omega}{\Omega_{\max}}. \quad (97,19)$$

Таким образом, излучение при электрон-позитронном рассеянии логарифмически велико по сравнению с излучением при электрон-электронном рассеянии.

§ 98. Излучение мягких фотонов при столкновениях

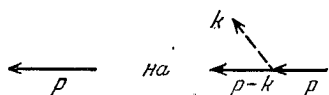
Пусть $d\sigma_0$ — сечение некоторого процесса рассеяния заряженных частиц, который может сопровождаться излучением определенного числа фотонов. Наряду с этим процессом рассмотрим также и другой процесс, отличающийся от первого лишь испусканием одного дополнительного фотона. Если частота ω этого фотона достаточно мала (соответствующие условия будут сформулированы ниже), то сечение $d\sigma$ второго процесса простым образом связано с $d\sigma_0$.

Действительно, при малых ω можно пренебречь обратным влиянием испускания этого кванта на процесс рассеяния. Другими словами, сечение $d\sigma$ может быть представлено в виде произведения двух независимых множителей: сечения $d\sigma_0$ и вероятности $d\omega$ испускания одного фотона при столкновении. Испускание мягкого фотона — процесс квазиклассический; поэтому его вероятность совпадает с классически вычисленным числом испущенных при столкновении квантов, т. е. с классической интенсивностью (полной энергией) излучения dI , деленной на $\omega (= \hbar\omega)$. Таким образом,

$$d\sigma = d\sigma_0 \frac{dI}{\omega}. \quad (98,1)$$

Покажем, как эта формула может быть получена по общим правилам диаграммной техники (*J. M. Jauch, F. Rohrlich, 1954*).

Диаграммы процесса с дополнительным фотоном получаются из диаграмм основного процесса путем добавления внешней фотонной линии, «ответвляющейся» от какой-либо (внешней или внутренней) электронной линии, т. е. путем замены



$$\leftarrow p \quad \text{на} \quad \leftarrow p-k \quad \leftarrow p \quad \uparrow k \quad (98,2)$$

Легко видеть, что основную роль будут играть диаграммы, получающиеся такой заменой во внешних электронных линиях. Действительно, если p — импульс внешней линии ($p^2 = m^2$), то