С нелогарифмической точностью существенны также и квадраты других диаграмм. Интерференционные же члены малы. Окончательный ответ:

$$d\sigma = 2\alpha r_e^2\,\frac{[E(\Omega_{\max}-\Omega)]^{1/2}}{m}\left(\ln\frac{2E}{m}+1\right)\frac{d\Omega}{\Omega_{\max}}. \qquad (97,19)$$

Таким образом, излучение при электрон-позитронном рассеянии логарифмически велико по сравнению с излучением при электрон-электронном рассеянии.

§ 98. Излучение мягких фотонов при столкновениях

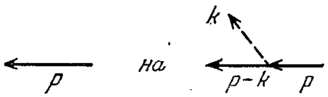
Пусть $d\sigma_0$ — сечение некоторого процесса рассеяния заряженных частиц, который может сопровождаться излучением определенного числа фотонов. Наряду с этим процессом рассмотрим также и другой процесс, отличающийся от первого лишь испусканием одного дополнительного фотона. Если частота ω этого фотона достаточно мала (соответствующие условия будут сформулированы ниже), то сечение $d\sigma$ второго процесса простым образом связано с $d\sigma_0$.

Действительно, при малых ω можно пренебречь обратным влиянием испускания этого кванта на процесс рассеяния. Другими словами, сечение $d\sigma$ может быть представлено в виде произведения двух независимых множителей: сечения $d\sigma_0$ и вероятности dw испускания одного фотона при столкновении. Испускание мягкого фотона — процесс квазиклассический; поэтому его вероятность совпадает с классически вычисленным числом испущенных при столкновении квантов, т. е. с классической интенсивностью (полной энергией) излучения dI, деленной на $\omega(=\hbar\omega)$. Таким образом,

$$d\sigma = d\sigma_0\,\frac{dI}{\omega}. \qquad (98,1)$$

Покажем, как эта формула может быть получена по общим правилам диаграммной техники (*J. M. Jauch, F. Rohrlich*, 1954).

Диаграммы процесса с дополнительным фотоном получаются из диаграмм основного процесса путем добавления внешней фотонной линии, «ответвляющейся» от какой-либо (внешней или внутренней) электронной линии, т. е. путем замены



(98,2)

Легко видеть, что основную роль будут играть диаграммы, получающиеся такой заменой во внешних электронных линиях. Действительно, если p — импульс внешней линии ($p^2 = m^2$), то при малых k будет также и $(p-k)^2 \approx m^2$, т. е. добавляющийся в диаграмме множитель $G(p-k)$ будет находиться вблизи своего полюса.

Для линии начального электрона p замена (98,2) сводится к замене в амплитуде реакции:

$$u(p) \to e\sqrt{4\pi}G(p-k)(\gamma e^*)u(p) =$$
$$= e\sqrt{4\pi}\,\frac{\gamma p-\gamma k+m}{(p-k)^2-m^2}(\gamma e^*)u(p) \approx -e\sqrt{4\pi}\,\frac{\gamma p+m}{2(pk)}(\gamma e^*)u(p).$$

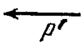
Заметив, что

$$(\gamma p)(\gamma e^*) = 2pe^* - (\gamma e^*)(\gamma p), \qquad \gamma p u(p) = m u(p),$$

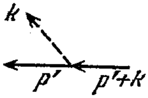
получим правило замены в виде

$$u(p) \to -e\sqrt{4\pi}\,\frac{(pe^*)}{(pk)}\,u(p). \tag{98,3}$$

Аналогичным образом для линии конечного электрона p' замена на диаграмме



на



означает замену в амплитуде:

$$\bar u(p') \to e\sqrt{4\pi}\,\bar u(p')\,\frac{(p'e^*)}{(p'k)}. \tag{98,4}$$

Во всех остальных частях диаграммы можно вообще пренебречь изменениями импульсов линий, связанными с испусканием фотона k. При этом подразумевается, что энергия фотона ω во всяком случае мала по сравнению с энергиями всех частиц, участвующих в реакции (в том числе по сравнению с энергиями излучаемых жестких фотонов, если таковые имеются).

Пусть для определенности сечение $d\sigma_0$ относится к рассеянию электрона на неподвижном ядре (с возможным излучением жестких фотонов). Амплитуда этого процесса, который мы условно назовем упругим, имеет вид

$$M_{fi}^{(\text{упр})} = \bar u(p')Mu(p).$$

Произведя в ней один раз замену (98,3), а другой раз (98,4) и сложив результаты, получим амплитуду тормозного излучения тех же жестких фотонов и мягкого фотона k[1]):

$$M_{fi} = M_{fi}^{(\text{упр})}e\sqrt{4\pi}\left(\frac{(p'e^*)}{(p'k)} - \frac{(pe^*)}{(pk)}\right). \tag{98,5}$$

[1]) Обратим внимание на то, что появление разности в этой формуле является естественным результатом калибровочной инвариантности: амплитуда реакции не должна меняться при замене 4-вектора поляризации $e \to e + \text{const}\cdot k$.

Соответственно сечение

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}} \cdot 4\pi e^2 \left| \frac{(p'e)}{(p'k)} - \frac{(pe)}{(pk)} \right|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2\omega}. \qquad (98,6)$$

Просуммировав по поляризациям фотона k, получим

$$d\sigma = -e^2 \left| \frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)} \right|^2 \frac{d^3k}{4\pi^2\omega} d\sigma_{\text{упр}}. \qquad (98,7)$$

Выраженная через трехмерные величины, эта формула имеет вид [1])

$$d\sigma = \alpha \left(\frac{[\mathbf{v}'\mathbf{n}]}{1 - \mathbf{v}'\mathbf{n}} - \frac{[\mathbf{v}\mathbf{n}]}{1 - \mathbf{v}\mathbf{n}} \right)^2 \frac{d\omega\, do_{\mathbf{k}}}{4\pi^2\omega} d\sigma_{\text{упр}}, \qquad (98,8)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, а $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ — начальная и конечная скорости электрона. Мы видим, что выражение, стоящее перед $d\sigma_{\text{упр}}$, действительно совпадает с (деленной на ω) классической интенсивностью излучения (ср. II (69,4)), как и утверждалось в формуле (98,1).

Условие применимости полученных формул требует также, помимо малости ω по сравнению с ε, чтобы передача импульса ядру $\mathbf{q}$ была велика по сравнению с изменением $\delta\mathbf{q}$ этой величины, связанной с испусканием мягкого фотона. Имеем

$$\delta\mathbf{q} = (\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k}) - (\mathbf{p}' - \mathbf{p})_{\omega=0} = \delta\mathbf{p}' - \mathbf{k},$$

причем

$$|\delta\mathbf{p}'| \sim \frac{\partial |\mathbf{p}'|}{\partial\varepsilon}\omega \sim \frac{\omega}{v},$$

а $|\mathbf{k}| = \omega$. В нерелятивистском случае ($v \ll 1$) получаем поэтому условие

$$\omega/|\mathbf{q}|v \ll 1. \qquad (98,9)$$

При рассеянии на кулоновом (и вообще на медленно спадающем с расстоянием) потенциале $|\mathbf{q}| \sim 1/\rho$ (ρ — прицельное расстояние), так что это условие можно представить и в виде $\omega\tau \ll 1$, где $\tau \sim \rho/v$ — характерное время столкновения.

В ультрарелятивистском случае фотоны излучаются в основном в направлениях вблизи $\mathbf{v}$ или $\mathbf{v}'$ (как это видно из знаменателей в (98,8)). Если угол θ рассеяния электрона мал, то направления всех трех векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{n}$ близки друг к другу. Тогда

$$|\delta\mathbf{q}| = |\delta\mathbf{p}'| - |\mathbf{k}| = \omega\left(\frac{1}{v} - 1\right) \sim \frac{\omega m^2}{\varepsilon^2},$$

---

[1]) Для ее вывода удобно вернуться к (98,6), положив

$$p = (\varepsilon, \varepsilon\mathbf{v}), \qquad pk = \varepsilon\omega(1 - \mathbf{v}\mathbf{n}), \; \ldots, \; e = (0, \mathbf{e})$$

и произведя заново суммирование по поляризациям с помощью (45,4а).

и поскольку $|\mathbf{q}| \sim \varepsilon\theta$, мы получаем условие

$$\theta \gg \frac{\omega}{\varepsilon}\frac{m^2}{\varepsilon^2}. \tag{98,10}$$

Ввиду квазиклассического характера формул (98,5—8) они справедливы для излучения любыми заряженными частицами (не обязательно электронами, для которых был проведен вывод). В общем случае, когда в реакции участвует несколько таких частиц, формула (98,5) должна быть записана в виде

$$M_{fi} = M_{fi}^{(\text{упр})} e\sqrt{4\pi} \sum Z \left(\frac{(p'e^*)}{(p'k)} - \frac{(pe^*)}{(pk)}\right), \tag{98,11}$$

где суммирование производится по всем частицам (с зарядами Ze); соответствующим образом меняются и формулы (98,6—8). В частности, в нерелятивистском случае

$$M_{fi} = M_{fi}^{(\text{упр})} \frac{e\sqrt{4\pi}}{\omega} \sum Z(\mathbf{v}' - \mathbf{v})\,\mathbf{e}^*. \tag{98,12}$$

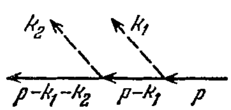
Для двух частиц эта формула принимает вид

$$\begin{gathered} M_{fi} = M_{fi}^{(\text{упр})} \frac{\sqrt{4\pi}}{\omega}\left(\frac{Z_1 e}{m_1} - \frac{Z_2 e}{m_2}\right)\mathbf{q}\mathbf{e}^*, \\ \mathbf{q} = m(\mathbf{v}' - \mathbf{v}), \qquad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \end{gathered} \tag{98,13}$$

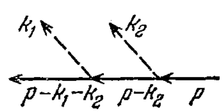
где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ — относительная скорость частиц до и после столкновения. Интегрируя квадрат $|M_{fi}|^2$ по направлениям вылета фотона и суммируя по направлениям его поляризации, получим отсюда нерелятивистское спектральное распределение излучения в виде

$$d\sigma_\omega = d\sigma_{\text{упр}} \frac{2e^2}{3\pi}\left(\frac{Z_1}{m_1} - \frac{Z_2}{m_2}\right)^2 \mathbf{q}^2 \frac{d\omega}{\omega}.$$

Полученные результаты обобщаются на случай одновременного излучения нескольких мягких фотонов. Для каждого из фотонов в амплитуду M_{fi} добавляется свой множитель того вида, который стоит при $M_{fi}^{(\text{упр})}$ в (98,5). В этом легко убедиться непосредственно, скажем, на примере двух фотонов. Линии обоих испускаемых фотонов должны добавляться на внешних электронных линиях, причем в двух различных последовательностях, т. е. диаграмма с внешней линией p заменяется двумя диаграммами с линиями



или



Каждая из них содержит множитель (знаменатели электронных пропагаторов)

$$\frac{1}{2((pk_1)+(pk_2))}\,\frac{1}{2(pk_1)} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2((pk_1)+(pk_2))}\,\frac{1}{2(pk_2)}.$$

Их сумма равна

$$\frac{1}{2(pk_1)}\,\frac{1}{2(pk_2)},$$

т. е. содержит произведение двух независимых множителей, отвечающих первому и второму фотону. После этого в сумме всех диаграмм члены собираются (в силу калибровочной инвариантности) в произведение разностей

$$\left(\frac{(p'e_1^*)}{(p'k_1)}-\frac{(pe_1^*)}{(pk_1)}\right)\left(\frac{(p'e_2^*)}{(p'k_2)}-\frac{(pe_2^*)}{(pk_2)}\right).$$

Соответственно факторизации амплитуды разбивается на множители также и сечение процесса. Таким образом, мягкие фотоны испускаются независимо. Сечение процесса с испусканием n мягких фотонов может быть представлено в виде

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}}\, dw_1 \,\ldots\, dw_n, \tag{98,14}$$

где $dw_1, dw_2, \ldots$ — вероятности отдельного испускания фотонов $k_1, k_2, \ldots$ При интегрировании этой формулы по конечному интервалу значений переменных (частот и направлений), одинаковому для всех квантов, должен быть введен множитель $1/n!$, учитывающий тождественность фотонов.

Если проинтегрировать сечение излучения (98,1) по частотам в некотором конечном интервале от ω_1 до ω_2, то мы получим выражение вида

$$d\sigma \sim \alpha \ln\frac{\omega_2}{\omega_1}\, d\sigma_{\text{упр}} \tag{98,15}$$

(ср. (98,8)). При этом подразумевается, что обе частоты мягкие, так что возможные значения ω_2 ограничены условием применимости метода. С логарифмической точностью, однако, можно положить $\omega_2 \sim \varepsilon$, где ε — начальная энергия излучающей частицы. Значения же ω_1 вообще ничем не ограничены снизу. Но устремив ω_1 к нулю, мы увидим, что сечение излучения всех возможных мягких квантов обращается в бесконечность. Выясним смысл этой ситуации — так называемой *инфракрасной катастрофы* (*F. Bloch*, *A. Nordsieck*, 1937).

При

$$\alpha \ln\frac{\varepsilon}{\omega_1} \gtrsim 1 \tag{98,16}$$

будет $d\sigma \gtrsim d\sigma_{\text{упр}}$. Но это означает неприменимость теории возмущений — невозможность вычислять $d\sigma$ как величину более высокого порядка малости, чем $d\sigma_{\text{упр}}$. Другими словами, параметром малости должно считаться в данном случае не α, а произведение $\alpha \ln(\varepsilon/\omega_1)$.

Таким образом, вывод формул (98,5—6) на основе теории возмущений оказывается неверным при достаточно малых частотах. С другой стороны, классическая формула для интенсивности dI (II (69,4)) применима в тем большей степени, чем меньше ω. Поэтому формула (98,1) останется правильной, если несколько видоизменить ее смысл в сторону большей классичности. Именно, в (98,1) подразумевалось, что излучается один фотон; тогда теряемая частицей на излучение энергия совпадает с ω и «сечение относительной потери энергии» дается выражением $\omega\, d\sigma/\varepsilon$, или

$$d\sigma_{\text{упр}} \frac{dI}{\varepsilon}. \tag{98,17}$$

В действительности же при достаточно малых ω вероятность излучения не мала, а вероятность излучения двух и более фотонов не меньше, а больше вероятности излучения одного фотона. В этих условиях выражение (98,17) останется справедливым, но классическая интенсивность dI будет определять не вероятность излучения одного фотона, а среднее число излученных фотонов

$$d\bar{n} = \frac{dI}{\omega}, \tag{98,18}$$

или, в конечном интервале частот,

$$\bar{n} = \int\limits_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} \frac{dI}{\omega}. \tag{98,19}$$

Поскольку мягкие фотоны излучаются статистически независимо (это справедливо во всех приближениях теории возмущений), к процессу множественного излучения можно применить формулу Пуассона: вероятность $w(n)$ излучения n фотонов выражается через среднее число $\bar{n}$ формулой

$$w(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} \exp(-\bar{n}). \tag{98,20}$$

Представим сечение процесса рассеяния с излучением фотонов в виде

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}} \cdot w(n). \tag{98,21}$$

Поскольку $\sum w(n) = 1$, то $d\sigma_{\text{упр}}$ представляет собой полное сечение рассеяния, сопровождаемого любым мягким излучением. Это обстоятельство очевидно из классического рассмотрения; по теории же возмущений $d\sigma_{\text{упр}}$ есть сечение чисто упругого рассеяния. Но теория возмущений здесь неприменима. Получается так, что $d\sigma_{\text{упр}}$, вычисленное по теории возмущений как сечение упругого рассеяния, в действительности учитывает излучение любых мягких фотонов. Что же касается сечения чисто упругого рассеяния, то оно в действительности равно нулю: при $\omega_1 \to 0$ среднее число $\bar{n} \to \infty$, и согласно (98,20) обращается в нуль вероятность излучения любого конечного числа фотонов[1]).

Задачи[2])

1. Найти спектральное распределение тормозного излучения мягких фотонов при рассеянии ультрарелятивистского электрона на ядре.

Решение. Интегрирование формулы (98,8) по $do_{\mathbf{k}}$ дает

$$d\sigma = \alpha F(\xi)\frac{d\omega}{\omega}\,d\sigma_{\text{упр}}, \tag{1}$$

где

$$F(\xi) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\xi^2+1}{\xi\sqrt{\xi^2+1}}\ln\left(\xi+\sqrt{\xi^2+1}\right)-1\right], \qquad \xi = \frac{|\mathbf{p}|}{m}\sin\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

($\mathbf{p}$ — импульс, θ — угол рассеяния электрона). В ультрарелятивистском случае основную роль играет область углов

$$\frac{m^2\omega}{\varepsilon^3} \ll \theta \ll \frac{m}{\varepsilon} \tag{3}$$

(нижняя граница — условие (98,10), о верхней границе см. ниже). При этом $\xi \approx \varepsilon\theta/2m \ll 1$, так что

$$F(\xi) \approx (8/3\pi)\,\xi^2,$$

а сечение упругого рассеяния электрона на ядре (см. (80,10))

$$d\sigma_{\text{упр}} \approx 4Z^2 r_e^2 \frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{do}{\theta^4}. \tag{4}$$

Интеграл

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\int\frac{d\theta}{\theta}$$

логарифмически расходится; он обрезается снизу на углах $\theta \sim m^2\omega/\varepsilon^3$, а сверху — при $\xi \sim 1$, т. е. на углах $\theta \sim m/\varepsilon$ (при $\xi \to \infty$

$$F \sim \frac{4}{\pi}\ln\xi,$$

так что интеграл сходится). Таким образом, с логарифмической точностью находим

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\ln\frac{\varepsilon^2}{m\omega} \tag{5}$$

---

[1]) Мы вернемся еще к обсуждению этой ситуации § 136 в связи с изучением радиационных поправок.

[2]) Приведенные ниже применения формулы (98,7) принадлежат *В. Н. Байеру* и *В. М. Галицкому* (1964).

— в согласии с логарифмической частью формулы (93,17) (в которой надо положить $\varepsilon \approx \varepsilon'$). Достичь нелогарифмической точности можно, лишь выйдя за пределы квазиклассической области.

2. Для столкновения двух ультрарелятивистских электронов определить (в системе центра инерции) сечение одновременного испускания двух мягких фотонов в противоположных направлениях под малыми углами к импульсам электронов.

Решение. Фотоны, летящие в противоположных направлениях, испускаются различными электронами, каждым в направлении своего движения. Сечение одновременного излучения

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}} \cdot \alpha F(\xi) \frac{d\omega_1}{\omega_1} \cdot \alpha F(\xi) \frac{d\omega_2}{\omega_2}, \qquad \xi = \frac{\varepsilon}{m} \sin\frac{\theta}{2}, \tag{6}$$

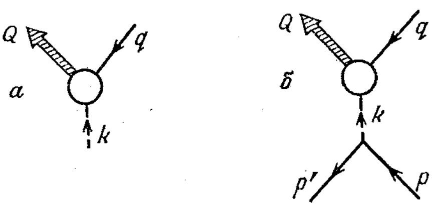
где ε — энергия каждого из электронов, θ — угол рассеяния в системе центра инерции, одинаковый для обоих электронов (поскольку фотоны испускаются заведомо в различных направлениях, вводить в сечение множитель $1/2$ не надо). Сечение упругого рассеяния электронов на малые углы в системе центра инерции в ультрарелятивистском случае совпадает с (4) (ср. (81,11)). В отличие от (1) сечение (6) ведет себя при $\theta \to 0$ как $\theta\, d\theta$, так что интеграл сходится. С одной стороны, это обстоятельство позволяет проводить интегрирование до $\theta = 0$ (не заботясь о возможном нарушении условия применимости метода). С другой стороны, основной вклад в интегральное сечение дает теперь область $\theta \sim m/\varepsilon$ (а не $\theta \ll m/\varepsilon$), так что надо пользоваться точным выражением (2). Результат интегрирования сечения по углам рассеяния:

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{2}{\pi}\left[5 + \frac{7}{2}\zeta(3)\right] r_e^2 \alpha^2 \frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2} = 5{,}9 r_e^2 \alpha^2 \frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2}$$

(ζ — функция Римана; $\zeta(3) = 1{,}202$).

§ 99. Метод эквивалентных фотонов

Сравним два процесса, описываемых диаграммами:



(99,1)

(кружки изображают условно всю внутреннюю часть диаграммы). Диаграмма *а*) изображает столкновение фотона k ($k^2 = 0$) с некоторой частицей с 4-импульсом q (и массой m; $q^2 = m^2$). В результате столкновения образуется система (частица или группа частиц) с общим 4-импульсом Q. Диаграмма *б*) изображает столкновение той же частицы q с другой частицей, 4-импульс которой p, а масса M ($p^2 = M^2$). В результате столкновения эта последняя частица приобретает 4-импульс p' и образуется та же система Q. Второй процесс можно рассматривать как столкновение частицы q с испущенным частицей p виртуаль-