ГЛАВА XI

ТОЧНЫЕ ПРОПАГАТОРЫ И ВЕРШИННЫЕ ЧАСТИ

§ 102. Операторы полей в гейзенберговском представлении

До сих пор при рассмотрении различных конкретных электродинамических процессов мы ограничивались первым неисчезающим приближением теории возмущений. Перейдем теперь к изучению эффектов, возникающих при учете высших приближений. Эти эффекты носят название *радиационных поправок.*

Более глубокое понимание структуры высших приближений может быть достигнуто на основе предварительного изучения общих свойств, которыми обладают точные (т. е. не разложенные по степеням e^2) амплитуды рассеяния. Мы видели (см. § 72), что последовательные члены ряда теории возмущений выражаются через операторы полей в представлении взаимодействия — операторы, временна́я зависимость которых определяется гамильтонианом системы свободных частиц $\hat{H}_0$. Точные же амплитуды рассеяния более удобно выражать через операторы поля не в этом, а в гейзенберговском представлении, в котором зависимость от времени определяется сразу точным гамильтонианом системы взаимодействующих частиц $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$.

По общему правилу составления гейзенберговских операторов имеем

$$\hat{\psi}(x) \equiv \hat{\psi}(t, \mathbf{r}) = \exp(i\hat{H}t)\,\hat{\psi}(\mathbf{r})\exp(-i\hat{H}t) \qquad (102,1)$$

и так же для $\hat{\bar{\psi}}(x)$ и $\hat{A}(x)$, причем $\hat{\psi}(\mathbf{r}), \ldots$ — не зависящие от времени (шредингеровские) операторы[1]). Сразу же отметим, что гейзенберговские операторы, взятые в одинаковые моменты времени, удовлетворяют тем же правилам коммутации, что и операторы в шредингеровском представлении или в представлении взаимодействия. Действительно, имеем, например,

$$\{\hat{\psi}_i(t, \mathbf{r}),\ \hat{\bar{\psi}}_k(t, \mathbf{r}')\}_+ =$$
$$= \exp(i\hat{H}t)\{\hat{\psi}_i(\mathbf{r}),\ \hat{\bar{\psi}}_k(\mathbf{r}')\}_+ \exp(-i\hat{H}t) = \gamma^0_{ik}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \qquad (102,2)$$

[1]) В этой главе операторы с временны́м аргументом будут относиться к гейзенберговскому представлению, а операторы в представлении взаимодействия будем отмечать дополнительным индексом int.

(ср. (75,6)). Аналогичным образом операторы $\hat{\psi}(t, \mathbf{r})$ и $\hat{A}(t, \mathbf{r}')$ коммутативны:

$$\{\hat{\psi}_i(t,\ \mathbf{r}),\quad \hat{A}(t,\ \mathbf{r}')\}_- = 0$$

(в различные моменты времени это уже отнюдь не так!).

«Уравнение движения», которому удовлетворяет гейзенберговский ψ-оператор, можно получить по общей формуле III (13,7):

$$-i\frac{\partial\hat{\psi}(x)}{\partial t} = \hat{H}\hat{\psi}(x) - \hat{\psi}(x)\hat{H}. \qquad (102,3)$$

Для гамильтониана шредингеровское и гейзенберговское представления тождественны, причем гамильтониан выражается одинаковым образом через операторы полей в обоих этих представлениях. В данном случае при вычислении правой стороны в (102,3) можно опустить в гамильтониане часть, зависящую только от оператора $\hat{A}(x)$ (гамильтониан свободного электромагнитного поля), поскольку эта часть коммутативна с $\hat{\psi}(x)$. Согласно (21,13) и (43,3) имеем

$$\hat{H} = \int \hat{\psi}^*(t,\ \mathbf{r})(\alpha\hat{\mathbf{p}} + \beta m)\hat{\psi}(t,\ \mathbf{r})\,d^3x + e\int \hat{\bar{\psi}}(t,\ \mathbf{r})(\gamma\hat{A}(t,\ \mathbf{r}))\hat{\psi}(t,\ \mathbf{r})\,d^3x =$$

$$= \int \hat{\bar{\psi}}(t,\ \mathbf{r})\{\gamma\hat{p} + m + e(\gamma\hat{A}(t,\ \mathbf{r}))\}\hat{\psi}(t,\ \mathbf{r})\,d^3x. \qquad (102,4)$$

Вычислив коммутатор $\{\hat{H}, \hat{\psi}(t, \mathbf{r})\}_-$ с помощью (102,2) и устранив δ-функцию интегрированием по d^3x, получим

$$(\gamma\hat{p} - e\gamma\hat{A} - m)\hat{\psi}(t,\ \mathbf{r}) = 0. \qquad (102,5)$$

Как и следовало ожидать, оператор $\hat{\psi}(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению, формально совпадающему с уравнением Дирака.

Уравнение же для оператора электромагнитного поля $\hat{A}(t, \mathbf{r})$ очевидно из соответствия с классическим случаем. В этом случае (большие числа заполнения — см. § 5) после усреднения по состоянию поля операторное уравнение должно перейти в классическое уравнение Максвелла для потенциалов II (30,2). Поэтому ясно, что уравнение для оператора просто совпадает по форме с уравнением Максвелла, т. е. (при произвольной калибровке) имеем

$$\partial^\nu\partial_\mu\hat{A}^\mu(x) - \partial^\mu\partial_\mu\hat{A}^\nu(x) = -4\pi e\hat{j}^\nu(x), \qquad (102,6)$$

где $\hat{j}^\nu(x) = \hat{\bar{\psi}}(x)\gamma^\nu\hat{\psi}(x)$ — оператор тока, тождественно удовлетворяющий уравнению непрерывности

$$\partial_\nu\hat{j}^\nu(x) = 0. \qquad (102,7)$$

Существенно, что уравнения (102,6) линейны по $\hat{A}^\mu$ и $\hat{j}^\mu$, и потому не возникает вопрос о порядке следования этих операторов.

Как и аналогичные уравнения для волновых функций, система операторных уравнений (102,6—7) инвариантна относительно калибровочного преобразования

$$\begin{gathered}\hat{A}_\mu(x) \to \hat{A}_\mu(x) - \partial_\mu \hat{\chi}(x), \quad \hat{\psi}(x) \to \hat{\psi}(x) \exp(ie\hat{\chi}), \\ \hat{\bar{\psi}}(x) \to \exp(-ie\hat{\chi}) \hat{\bar{\psi}}(x),\end{gathered} \tag{102,8}$$

где $\hat{\chi}(x)$ — произвольный эрмитов оператор, коммутирующий (в один и тот же момент времени) с $\hat{\psi}$ [1]).

Установим теперь связь между операторами в гейзенберговском представлении и в представлении взаимодействия. Для упрощения рассуждений удобно сделать формальное предположение (не сказывающееся на окончательном результате), что взаимодействие $\hat{V}(t)$ адиабатически «включается» от $t = -\infty$ к конечным временам. Тогда при $t \to -\infty$ оба представления — гейзенберговское и представление взаимодействия — просто совпадают. Совпадают и соответствующие волновые функции системы Φ и Φ_{int}:

$$\Phi_{\text{int}}(t = -\infty) = \Phi. \tag{102,9}$$

С другой стороны, волновая функция в гейзенберговском представлении от времени вообще не зависит (вся временная зависимость перенесена на операторы), а в представлении взаимодействия для зависимости волновой функции от времени имеем согласно (72,7)

$$\Phi_{\text{int}}(t) = \hat{S}(t, -\infty) \Phi_{\text{int}}(-\infty), \tag{102,10}$$

где введен оператор

$$\hat{S}(t_2, t_1) = \mathrm{T} \exp\left\{-i \int_{t_1}^{t_2} \hat{V}(t')\, dt'\right\} \tag{102,11}$$

с очевидными свойствами

$$\hat{S}(t, t_1) \hat{S}(t_1, t_0) = \hat{S}(t, t_0), \quad \hat{S}^{-1}(t, t_1) = \hat{S}(t_1, t). \tag{102,12}$$

Сравнив формулы (102,10) и (102,9), найдем соотношение

$$\Phi_{\text{int}}(t) = \hat{S}(t, -\infty) \Phi, \tag{102,13}$$

[1]) Подчеркнем, что здесь идет речь именно о гейзенберговских ψ-операторах. В представлении взаимодействия калибровочное преобразование электромагнитных потенциалов вообще не затрагивает ψ-операторов.

устанавливающее связь между волновыми функциями в обоих представлениях. Соответственно формула преобразования операторов:

$$\hat{\psi}(t,\ \mathbf{r}) = \hat{S}^{-1}(t,\ -\infty)\,\hat{\psi}_{\text{int}}(t,\ \mathbf{r})\,\hat{S}(t,\ -\infty) =$$
$$= \hat{S}(-\infty,\ t)\,\hat{\psi}_{\text{int}}(t,\ \mathbf{r})\,\hat{S}(t,\ -\infty) \qquad (102,14)$$

(то же самое для $\hat{\bar{\psi}}$ и $\hat{A}$).

Сделаем в заключение еще одно общее замечание. Мы уже неоднократно указывали, что в релятивистской квантовой теории физический смысл операторов поля весьма ограничен из-за бесконечности нулевых флуктуаций. Это тем более относится к операторам в гейзенберговском представлении, которые фактически содержат в себе еще и расходимости, связанные с взаимодействием. В этой главе § 102—109 посвящены изложению формальной теории, в которой вопросы устранения этих бесконечностей не обсуждаются и действия со всеми величинами производятся так, как если бы они были конечными. Получаемые таким образом результаты имеют преимущественно эвристическую ценность: они позволяют более глубоко уяснить смысл разложений теории возмущений; возможно также, что они сохранятся в каком-то виде и в будущей теории, свободной от нынешних затруднений.

§ 103. Точный фотонный пропагатор

Основную роль в аппарате точной (без разложений по степеням e^2) теории играют понятия о точных пропагаторах [1]).

Точный фотонный пропагатор (который мы будем обозначать буквой $\mathscr{D}$ рукописного шрифта) определяется формулой

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(x - x') = i\langle 0\,|\,\mathrm{T}A_\mu(x)\,A_\nu(x')\,|\,0\rangle, \qquad (103,1)$$

где $\hat{A}_\mu(x)$ — гейзенберговские операторы, в отличие от определения (76,1):

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i\langle 0\,|\,\mathrm{T}A_\mu^{\text{int}}(x)\,A_\nu^{\text{int}}(x')\,|\,0\rangle, \qquad (103,2)$$

в котором фигурировали операторы в представлении взаимодействия. В отличие от точного пропагатора (103,1), функцию (103,2) можно назвать *пропагатором свободных фотонов.*

Ввиду невозможности точного вычисления среднего значения (103,1) нельзя получить точное аналитическое выражение для $\mathscr{D}_{\mu\nu}$, хотя определение (103,1) и позволяет установить некоторые общие свойства этой функции. Этому будет посвящен

[1]) Эти понятия были введены *Дайсоном* (*F. Dyson*, 1949); им же в основном построен весь излагаемый в этой главе аппарат.