

устанавливающее связь между волновыми функциями в обоих представлениях. Соответственно формула преобразования операторов:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(t, \mathbf{r}) &= \hat{S}^{-1}(t, -\infty) \hat{\psi}_{\text{int}}(t, \mathbf{r}) \hat{S}(t, -\infty) = \\ &= \hat{S}(-\infty, t) \hat{\psi}_{\text{int}}(t, \mathbf{r}) \hat{S}(t, -\infty) \quad (102,14)\end{aligned}$$

(то же самое для $\hat{\psi}$ и \hat{A}).

Сделаем в заключение еще одно общее замечание. Мы уже неоднократно указывали, что в релятивистской квантовой теории физический смысл операторов поля весьма ограничен из-за бесконечности нулевых флуктуаций. Это тем более относится к операторам в гейзенберговском представлении, которые фактически содержат в себе еще и расходимости, связанные с взаимодействием. В этой главе § 102—109 посвящены изложению формальной теории, в которой вопросы устранения этих бесконечностей не обсуждаются и действия со всеми величинами производятся так, как если бы они были конечными. Получаемые таким образом результаты имеют преимущественно эвристическую ценность: они позволяют более глубоко уяснить смысл разложений теории возмущений; возможно также, что они сохранятся в каком-то виде и в будущей теории, свободной от нынешних затруднений.

§ 103. Точный фотонный пропагатор

Основную роль в аппарате точной (без разложений по степеням e^2) теории играют понятия о точных пропагаторах¹⁾.

Точный фотонный пропагатор (который мы будем обозначать буквой \mathcal{D} рукописного шрифта) определяется формулой

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') = i \langle 0 | T A_{\mu}(x) A_{\nu}(x') | 0 \rangle, \quad (103,1)$$

где $\hat{A}_{\mu}(x)$ — гейзенберговские операторы, в отличие от определения (76,1):

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i \langle 0 | T A_{\mu}^{\text{int}}(x) A_{\nu}^{\text{int}}(x') | 0 \rangle, \quad (103,2)$$

в котором фигурировали операторы в представлении взаимодействия. В отличие от точного пропагатора (103,1), функцию (103,2) можно назвать *пропагатором свободных фотонов*.

Ввиду невозможности точного вычисления среднего значения (103,1) нельзя получить точное аналитическое выражение для $\mathcal{D}_{\mu\nu}$, хотя определение (103,1) и позволяет установить некоторые общие свойства этой функции. Этому будет посвящен

¹⁾ Эти понятия были введены Дайсоном (F. Dyson, 1949); им же в основном построен весь излагаемый в этой главе аппарат.

§ 111, а пока мы займемся вычислением $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ по теории возмущений, с помощью диаграммной техники. Для этого надо выразить $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ через операторы в представлении взаимодействия.

Пусть сначала $t > t'$. Используя связь между $\hat{A}(x)$ и $\hat{A}_{\text{int}}(x)$ (ср. (102,14)), пишем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') &= i \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle = \\ &= i \langle 0 | S(-\infty, t) A_\mu^{\text{int}}(x) S(t, -\infty) S(-\infty, t') A_\nu^{\text{int}}(x') S(t', -\infty) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Согласно (102,12) заменяем

$$\begin{aligned} \hat{S}(t, -\infty) \hat{S}(-\infty, t') &= \hat{S}(t, t'), \\ \hat{S}(-\infty, t) &= \hat{S}(-\infty, +\infty) \hat{S}(+\infty, t). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') &= \\ &= i \langle 0 | S^{-1} [S(+\infty, t) A_\mu^{\text{int}}(x) S(t, t') A_\nu^{\text{int}}(x') S(t', -\infty)] | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (103,3)$$

где для краткости обозначено

$$\hat{S} \equiv \hat{S}(+\infty, -\infty). \quad (103,4)$$

Поскольку по определению (102,11) $\hat{S}(t_2, t_1)$ содержит только операторы в моменты времени между t_1 и t_2 , расположенные в хронологическом порядке, то очевидно, что вообще все операторные множители в квадратных скобках в (103,3) расположены в порядке убывания времен слева направо. Поставив перед скобкой символ хронологизации T , мы можем затем произвольно переставлять порядок множителей, так как оператор T автоматически устанавливает их в нужном порядке. Воспользовавшись этим, перепишем выражение в скобках в виде

$$\begin{aligned} [\dots] &= T [\hat{A}_\mu^{\text{int}}(x) \hat{A}_\nu^{\text{int}}(x') \hat{S}(+\infty, t) \hat{S}(t, t') \hat{S}(t', -\infty)] = \\ &= T [\hat{A}_\mu^{\text{int}}(x) \hat{A}_\nu^{\text{int}}(x') \hat{S}]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') = i \langle 0 | S^{-1} T [A_\mu^{\text{int}}(x) A_\nu^{\text{int}}(x') S] | 0 \rangle. \quad (103,5)$$

Легко убедиться аналогичным образом, что эта формула верна и при $t < t'$.

Покажем теперь, что множитель S^{-1} можно вынести из-под знака усреднения по вакууму в виде некоторого фазового множителя. Для этого вспомним, что гейзенберговская волновая функция вакуума Φ совпадает со значением $\Phi_{\text{int}}(-\infty)$ волновой функции этого же состояния в представлении взаимодействия (см. (102,9)). Согласно же (72,8) имеем

$$\hat{S} \Phi_{\text{int}}(-\infty) \equiv \hat{S}(+\infty, -\infty) \Phi_{\text{int}}(-\infty) = \Phi_{\text{int}}(+\infty).$$

Но вакуум представляет собой строго стационарное состояние; в нем невозможны никакие самопроизвольные процессы рождения частиц. Другими словами, с течением времени вакуум остается вакуумом; это означает, что $\Phi_{\text{int}}(+\infty)$ может отличаться от $\Phi_{\text{int}}(-\infty)$ лишь некоторым фазовым множителем $e^{i\alpha}$. Поэтому

$$\hat{S}\Phi_{\text{int}}(-\infty) = e^{i\alpha}\Phi_{\text{int}}(-\infty) = \langle 0 | S | 0 \rangle \Phi_{\text{int}}(-\infty). \quad (103,6)$$

Произведя комплексное сопряжение и учтя унитарность оператора \hat{S} , получим

$$\Phi_{\text{int}}^*(-\infty) \hat{S}^{-1} = \langle 0 | S | 0 \rangle^{-1} \Phi_{\text{int}}^*(-\infty).$$

Отсюда ясно, что выражение (103,5) может быть переписано в виде

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') = i \frac{\langle 0 | T A_{\mu}^{\text{int}}(x) A_{\nu}^{\text{int}}(x') S | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}. \quad (103,7)$$

Подставив сюда (в числитель и знаменатель) разложение (72,10) для \hat{S} и произведя усреднение с помощью теоремы Вика (см. § 77), мы получим разложение $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ по степеням e^2 .

В числителе (103,7) усредняемые выражения отличаются от матричных элементов рассматривавшегося в § 77 типа (77,1) лишь тем, что вместо «внешних» операторов рождения или уничтожения фотонов в них стоят операторы $\hat{A}_{\mu}^{\text{int}}(x)$ и $\hat{A}_{\nu}^{\text{int}}(x')$. Поскольку все множители в усредняемых произведениях стоят под знаком хронологизации, попарные свертки этих операторов с «внутренними» операторами $\hat{A}^{\text{int}}(x_1)$, $\hat{A}^{\text{int}}(x_2)$, ... будут давать фотонные пропагаторы $D_{\mu\nu}$. Таким образом, результаты усреднения выразятся совокупностями диаграмм с двумя внешними концами, составляемых по описанным в § 77 правилам, с той лишь разницей, что внешним (как и внутренним) фотонным линиям диаграммы будут отвечать теперь пропагаторы $D_{\mu\nu}$ (вместо амплитуд e реальных фотонов). В нулевом приближении, при $\hat{S} = 1$, числитель выражения (103,7) совпадает просто с $D_{\mu\nu}(x-x')$. Следующие отличные от нуля члены будут $\sim e^2$. Они изобразятся совокупностью диаграмм, содержащих два внешних конца и две вершины:

$$\begin{array}{c}
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}
 \end{array}
 \quad (103,8)$$

Вторая из этих диаграмм состоит из двух не связанных между собой частей: пунктирной линии (которой отвечает $-iD_{\mu\nu}$) и замкнутой петли. Такое распадение диаграммы означает распа-

дение соответствующего ему аналитического выражения на два независимых множителя. Прибавив к диаграммам (103,8) диаграмму (линию — — — —) нулевого приближения и «вынеся ее за скобку», найдем в результате, что с точностью до членов второго порядка числитель в (103,7) равен

$$--- \left\{ 1 + \text{loop} \right\} + --- \text{loop} ---$$

Выражение же $\langle 0|S|0\rangle$ в знаменателе (103,7) представляет собой амплитуду «перехода» из вакуума в вакуум. Его разложение содержит поэтому лишь диаграммы без внешних концов. В нулевом приближении $\langle 0|S|0\rangle = 1$, а с точностью до членов второго порядка получим

$$\left\{ 1 + \text{loop} \right\}$$

Разделив с той же точностью числитель на знаменатель, найдем, что фигурная скобка сокращается и остается

$$--- + --- \text{loop} ---$$

Таким образом, диаграмма с отсоединенной петлей выпадает из ответа. Этот результат имеет общий характер. Вдумавшись в способ построения диаграмм, отвечающих числителю и знаменателю в (103,7), нетрудно понять, что роль знаменателя $\langle 0|S|0\rangle$ сводится к тому, что в любом порядке теории возмущений точный пропагатор $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ будет изображаться лишь диаграммами, не содержащими отделенных друг от друга частей.

Заметим, что диаграммы без внешних концов (замкнутые петли) вообще не имеют физического смысла и их не следует учитывать даже независимо от того, что они выпадают при образовании пропагатора \mathcal{D} . Действительно такие петли представляют собой радиационные поправки к диагональному элементу S -матрицы для перехода вакуум — вакуум. Но согласно (103,6) сумма всех этих петель (вместе с единицей нулевого приближения) дает лишь несущественный фазовый множитель, который не может отразиться ни на каких физических результатах.

Переход от координатного к импульсному представлению происходит обычным образом. Так, во втором приближении теории возмущений пропагатор $-i\mathcal{D}_{\mu\nu}(k)$ (который мы будем изображать жирной пунктирной линией) дается суммой

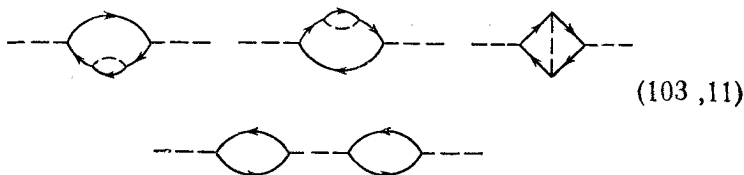
$$\text{thick dashed } k \approx \text{thick dashed } k + \text{thick dashed } k \text{ loop } k \text{ thick dashed } k \quad (103,9)$$

где все диаграммы вычисляются по обычным правилам (перечисленным в § 77), с той лишь разницей, что внешним фотонным линиям, как и внутренним, тоже сопоставляются множители $-iD_{\mu\nu}(k)$. Аналитическая запись этой формулы дает поэтому¹⁾

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) \approx D_{\mu\nu}(k) + ie^2 D_{\mu\lambda}(k) \int \text{Sp } \gamma^\lambda G(p+k) \gamma^0 G(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} D_{\rho\nu}(k) \quad (103,10)$$

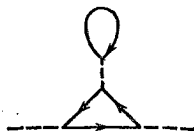
(биспинорные индексы у матриц γ и G , как обычно, не выписываем).

Члены следующих приближений строятся аналогичным образом; они изображаются совокупностями диаграмм с двумя внешними фотонными концами и нужным числом вершин. Так, членам $\sim e^4$ отвечают следующие диаграммы с четырьмя вершинами:



(103,11)

Четырьмя вершинами обладает также и диаграмма



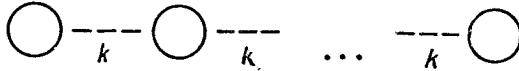
верхнюю часть которой составляет петля, образованная одной «замкнутой на себя» электронной линией. Такая петля отвечает свертке $\hat{\psi}(x) \gamma \hat{\psi}(x)$, т. е. просто среднему по вакууму значению тока: $\langle 0 | j(x) | 0 \rangle$. Но уже по самому определению вакуума эта величина должна тождественно обращаться в нуль, и это тождество не может, разумеется, быть изменено никакими дальнейшими радиационными поправками к такой петле²⁾. Поэтому вообще никакие диаграммы «с замкнутыми на себя» электронными линиями не должны учитываться ни в каком приближении.

Часть диаграммы («блок»), заключенную между двумя фотонными линиями (внешними или внутренними), называют вообще *фотонной собственно-энергетической частью*. В общем

¹⁾ При определении знаков не забыть о множителе -1 , привносимом замкнутой электронной петлей!

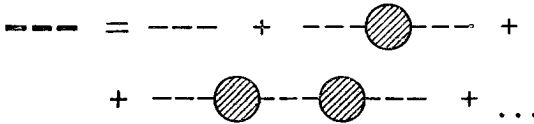
²⁾ Хотя прямое вычисление по диаграммам и привело бы к расходящимся интегралам.

случае такой блок еще сам может быть разделен на части, соединенные попарно одной фотонной линией, т. е. имеет структуру вида



где кружки обозначают блоки, которые уже нельзя разделить дальше таким способом; эти части называют *компактными* (например, из четырех собственно-энергетических частей четвертого порядка (103,11) компактны первые три).

Обозначим символом $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$ сумму всех (бесконечного множества) компактных собственно-энергетических частей; функцию $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$ называют *поляризационным оператором*. Классифицируя диаграммы по числу содержащихся в них компактных частей, можно представить точный пропагатор $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ в виде ряда



где каждому заштрихованному кружку сопоставляется $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$. Аналитически этот ряд запишется в виде

$$\mathcal{D} = D + D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D + D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D + \dots = D \left\{ 1 + \frac{\mathcal{P}}{4\pi} \left[D + D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D + \dots \right] \right\} \quad (103,12)$$

(тензорные индексы для краткости опущены). Но ряд в квадратных скобках вновь совпадает с рядом для \mathcal{D} . Поэтому имеем

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}(k) + D_{\mu\lambda}(k) \frac{\mathcal{P}^{\lambda\rho}(k)}{4\pi} \mathcal{D}_{\rho\nu}(k). \quad (103,13)$$

Умножив это равенство слева на обратный тензор $(D^{-1})^{\tau\mu}$ и справа на $(\mathcal{D}^{-1})^{\nu\sigma}$ (и изменив обозначения индексов), получим его в эквивалентном виде:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} = D_{\mu\nu}^{-1} - \frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}}{4\pi}. \quad (103,14)$$

Подчеркнем, что представление \mathcal{D} в виде (103,12) подразумевает, что из диаграмм можно выделить более простые блоки, которые вычисляются по общим правилам диаграммной техники. Комбинируя такие блоки друг с другом, мы получим правильные выражения для диаграмм в целом. Допустимость такого разделения составляет важную (и отнюдь не тривиальную) осо-

бенность диаграммной техники. Она связана с тем, что общий числовой коэффициент в диаграмме не зависит от ее порядка.

Это же свойство позволяет использовать функцию \mathcal{D} (если она известна) для упрощения вычислений радиационных поправок к амплитудам различных процессов рассеяния: вместо того, чтобы рассматривать каждый раз заново диаграммы с различными поправками к внутренним фотонным линиям, мы можем просто заменить эти линии жирными, т. е. сопоставить им пропагаторы \mathcal{D} (вместо D), взяв их в требуемом приближении.

Если фотонная линия отвечает реальному (а не виртуальному) фотону, т. е. если она является внешним концом диаграммы в целом, то после введения в нее всех собственно-энергетических поправок мы получим, как говорят, *эффективную внешнюю линию*. Ей отвечает выражение, отличающееся от (103,13) заменой множителя D поляризационной амплитудой реального фотона:

$$e_\mu + \mathcal{D}_{\mu\rho}(k) \frac{\mathcal{P}^{\rho\lambda}(k)}{4\pi} e_\lambda. \quad (103,15)$$

Если же речь идет о линии внешнего поля, то вместо e_μ здесь надо писать $A_\mu^{(e)}$.

Все сказанное в § 76 относительно тензорной структуры и калибровочной неоднозначности приближенного пропагатора $D_{\mu\nu}$ относится и к точной функции $\mathcal{D}_{\mu\nu}$. Оставаясь в рамках релятивистски инвариантных представлений этой функции, напишем ее общий вид в форме

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \mathcal{D}(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \mathcal{D}^{(l)}(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}; \quad (103,16)$$

первый член отвечает калибровке Ландау, а во втором члене $\mathcal{D}^{(l)}$ — калибровочно-произвольная функция. Аналогичное представление приближенного пропагатора ¹⁾:

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + D^{(l)}(k^2) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (103,17)$$

Заметим теперь, что продольная часть пропагатора связана с не имеющей физического смысла продольной частью 4-потенциала и не участвует во взаимодействии. Поэтому взаимодействие не меняет ее, так что должно быть

$$\mathcal{D}^{(l)}(k^2) = D^{(l)}(k^2). \quad (103,18)$$

Обратные тензоры, по определению, удовлетворяют равенствам

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} \mathcal{D}^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\lambda, \quad D_{\mu\nu}^{-1} D^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\lambda.$$

¹⁾ Определение $D^{(l)}$ в этой формуле не совпадает с определением в (76,3).

Для прямых тензоров (103,16) и (103,17) обратные тензоры с учетом (103,18) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} &= \frac{1}{\mathcal{D}} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{1}{D^{(l)}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \\ D_{\mu\nu}^{-1} &= \frac{1}{D} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{1}{D^{(l)}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \end{aligned} \tag{103,19}$$

Из этих формул следует, что поляризационный оператор представляет собой поперечный тензор:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = \mathcal{P}(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \tag{103,20}$$

причем $\mathcal{P} = k^2 - 4\pi/\mathcal{D}$ или

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 [1 - \mathcal{P}(k^2)/k^2]}. \tag{103,21}$$

Таким образом, поляризационный оператор является (в отличие от самого фотонного пропагатора) калибровочно-инвариантной величиной.

§ 104. Собственно-энергетическая функция фотона

Для дальнейшего исследования аналитических свойств фотонного пропагатора будет полезно ввести, наряду с поляризационным оператором, еще одну вспомогательную функцию $\Pi_{\mu\nu}(k)$, которую называют *собственно-энергетической функцией фотона*. Именно, $i\Pi_{\mu\nu}/4\pi$ определяется как сумма всех вообще (а не только компактных) собственно-энергетических фотонных частей. Изобразив эту сумму квадратиком на диаграмме, представим точный пропагатор суммой



т. е.

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + D_{\mu\lambda} \frac{\Pi^{\lambda\rho}}{4\pi} D_{\rho\nu}. \tag{104,1}$$

Выразив отсюда $\Pi_{\mu\nu}$ в виде

$$\frac{1}{4\pi} \Pi_{\mu\nu} = D_{\mu\lambda}^{-1} \mathcal{D}^{\lambda\rho} D_{\rho\nu}^{-1} - D_{\mu\nu}^{-1}$$

и подставив в это равенство (103,16), (103,19) и затем (103,21), получим

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad \Pi = \frac{\mathcal{P}}{1 - \mathcal{P}/k^2}. \tag{104,2}$$