Для прямых тензоров (103,16) и (103,17) обратные тензоры с учетом (103,18) имеют вид

$$\mathscr{D}^{-1}_{\mu\nu} = \frac{1}{\mathscr{D}}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{1}{D^{(l)}}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2},$$
$$D^{-1}_{\mu\nu} = \frac{1}{D}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{1}{D^{(l)}}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \qquad (103,19)$$

Из этих формул следует, что поляризационный оператор представляет собой поперечный тензор:

$$\mathscr{P}_{\mu\nu} = \mathscr{P}(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right), \qquad (103,20)$$

причем $\mathscr{P} = k^2 - 4\pi/\mathscr{D}$ или

$$\mathscr{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2[1 - \mathscr{P}(k^2)/k^2]}. \qquad (103,21)$$

Таким образом, поляризационный оператор является (в отличие от самого фотонного пропагатора) калибровочно-инвариантной величиной.

§ 104. Собственно-энергетическая функция фотона

Для дальнейшего исследования аналитических свойств фотонного пропагатора будет полезно ввести, наряду с поляризационным оператором, еще одну вспомогательную функцию $\Pi_{\mu\nu}(k)$, которую называют *собственно-энергетической функцией фотона*. Именно, $i\Pi_{\mu\nu}/4\pi$ определяется как сумма всех вообще (а не только компактных) собственно-энергетических фотонных частей. Изобразив эту сумму квадратиком на диаграмме, представим точный пропагатор суммой

т. е.

$$\mathscr{D}_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + D_{\mu\lambda}\frac{\Pi^{\lambda\rho}}{4\pi}D_{\rho\nu}. \qquad (104,1)$$

Выразив отсюда $\Pi_{\mu\nu}$ в виде

$$\frac{1}{4\pi}\Pi_{\mu\nu} = D^{-1}_{\mu\lambda}\mathscr{D}^{\lambda\rho}D^{-1}_{\rho\nu} - D^{-1}_{\mu\nu}$$

и подставив в это равенство (103,16), (103,19) и затем (103,21), получим

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right), \quad \Pi = \frac{\mathscr{P}}{1 - \mathscr{P}/k^2}. \qquad (104,2)$$

Мы видим, что $\Pi_{\mu\nu}$ (как и $\mathcal{P}_{\mu\nu}$) — калибровочно-инвариантный тензор.

Полезность величины $\Pi_{\mu\nu}$ связана с ее выражением в координатном представлении. Его легко найти, заметив, что равенство

$$\frac{1}{4\pi}\Pi_{\mu\nu}(k)=D^{-1}_{\mu\lambda}D^{-1}_{\rho\nu}\left\{\mathcal{D}^{\lambda\rho}(k)-D^{\lambda\rho}(k)\right\},$$

с учетом следующей из (103,18) поперечности тензора $\mathcal{D}^{\lambda\rho}-D^{\lambda\rho}$, в координатном представлении можно написать в виде

$$\Pi_{\mu\nu}(x-x')=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left(\partial_\mu\partial_\lambda-g_{\mu\lambda}\partial_\sigma\partial^\sigma\right)\left(\partial'_\nu\partial'_\rho-g_{\nu\rho}\partial'_\sigma\partial'^\sigma\right)\left\{\mathcal{D}^{\lambda\rho}(x-x')-D^{\lambda\rho}(x-x')\right\}.$$

Для осуществления дифференцирования сюда надо подставить

$$\mathcal{D}^{\lambda\rho}(x-x')-D^{\lambda\rho}(x-x')=$$
$$=i\left\langle 0\left|\mathrm{T}A^{\lambda}(x)A^{\rho}(x')-\mathrm{T}A^{\lambda}_{\mathrm{int}}(x)A^{\rho}_{\mathrm{int}}(x')\right|0\right\rangle. \qquad (104,3)$$

Мы видели в § 75, что дифференцирование T-произведения требует, вообще говоря, осторожности ввиду его разрывного характера. Но усредняемая в (104,3) разность непрерывна вместе со своими первыми производными, так как правила коммутации для компонент операторов $\hat{A}^{\lambda}(x)$ и $\hat{A}^{\lambda}_{\mathrm{int}}(x)$ (взятых в один и тот же момент времени) одинаковы и соответствующие скачки сокращаются (ср. § 75). Поэтому дифференцирование разности (104,3) можно производить под знаком T. Согласно (102,6) (и такому же уравнению без правой части для операторов свободного электромагнитного поля $\hat{A}^{\mu}_{\mathrm{int}}(x)$) получим в результате выражение

$$\Pi_{\mu\nu}(x-x')=4\pi ie^2\langle 0|\mathrm{T}j_\mu(x)j_\nu(x')|0\rangle. \qquad (104,4)$$

Оно в явном виде выявляет калибровочную инвариантность $\Pi_{\mu\nu}$, поскольку таковы операторы тока.

Из (104,4) можно получить важное интегральное представление этой функции.

Ввиду (104,2) достаточно рассмотреть скалярную функцию $\Pi=\Pi^{\mu}_{\mu}/3$. В координатном представлении

$$\Pi(x-x')=\frac{4\pi}{3}ie^2\langle 0|\mathrm{T}j_\mu(x)j^\mu(x')|0\rangle=$$
$$=\frac{4\pi}{3}ie^2\begin{cases}\sum\limits_n\langle 0|j_\mu(x)|n\rangle\langle n|j^\mu(x')|0\rangle, & t>t',\\ \sum\limits_n\langle 0|j_\mu(x')|n\rangle\langle n|j^\mu(x)|0\rangle, & t<t',\end{cases} \qquad (104,5)$$

где символ n нумерует состояния системы «электромагнитное + + электрон-позитронное поля»[1]). Так как оператор тока $\hat{j}(x)$ зависит от $x^\mu = (t, \mathbf{r})$, зависят от x также и его матричные элементы. Эту зависимость можно установить в явном виде, если выбрать в качестве состояний $|n\rangle$ состояния с определенными значениями полного 4-импульса.

Зависимость матричных элементов тока от времени, как и для всякого гейзенберговского оператора, дается выражением

$$\langle n | j^\mu (t, \mathbf{r}) | m\rangle = \langle n | j^\mu (\mathbf{r}) | m\rangle e^{-i(E_m - E_n)t},$$

где E_n, E_m — энергии состояний $|n\rangle$ и $|m\rangle$, $\hat{j}(\mathbf{r})$ — шредингеровский оператор.

Для определения координатной зависимости матричных элементов рассматриваем оператор $\hat{j}(\mathbf{r})$ как результат преобразования оператора $\hat{j}(0)$ путем параллельного переноса на расстояние $\mathbf{r}$. Оператор такого переноса есть $\exp(i\mathbf{r}\hat{\mathbf{P}})$, где $\hat{\mathbf{P}}$ — оператор полного импульса системы (см. III (15,13)). Имея в виду общее правило преобразования матричных элементов (см. III (12,7)), находим поэтому, что

$$\langle n | j^\mu (\mathbf{r}) | m\rangle = \langle n | e^{-i\mathbf{r}\mathbf{P}} j^\mu (0) e^{i\mathbf{r}\mathbf{P}} | m\rangle = \langle n | j^\mu (0) | m\rangle e^{i(\mathbf{P}_m - \mathbf{P}_n)\mathbf{r}}.$$

Вместе с предыдущей формулой это дает окончательно

$$\langle n | j^\mu (t, \mathbf{r}) | m\rangle = \langle n | j^\mu (0) | m\rangle e^{-i(P_m - P_n)x}. \qquad (104,6)$$

Отметим также, что матрица $\langle n | j^\mu(0) | m\rangle$ эрмитова (как и матрица (104,6) оператора $\hat{j}^\mu (t, \mathbf{r})$ в целом), а в силу уравнения непрерывности (102,7) она удовлетворяет условию поперечности

$$(P_n - P_m)^\mu \langle n | j_\mu (0) | m\rangle = 0. \qquad (104,7)$$

Вернемся к вычислению функции $\Pi(x - x')$. Подставив (104,6) в (104,5), получим

$$\Pi(\xi) = \frac{4\pi i e^2}{3} \sum_n \langle 0 | j_\mu (0) | n\rangle \langle n | j^\mu (0) | 0\rangle e^{\mp i P_n \xi}, \quad \tau \gtrless 0, \qquad (104,8)$$

где $x - x' = \xi = (\tau, \boldsymbol{\xi})$. Обозначим

$$\rho(k^2) = -\frac{4\pi e^2}{3} (2\pi)^3 \sum_n{}' \langle 0 | j_\mu (0) | n\rangle \langle 0 | j^\mu (0) | n\rangle^* \delta^{(4)} (k - P_n). \qquad (104,9)$$

---

[1]) Оператор тока сохраняет заряд, поэтому состояния $|n\rangle$ в (104,5) могут содержать лишь одинаковые числа электронов и позитронов.

Суммирование производится по всем системам реальных электронных пар и фотонов, которые могут быть рождены виртуальным фотоном с 4-импульсом $k=(\omega, \mathbf{k})$ $(\Delta > 0)$, а для каждой из таких систем — еще и по ее внутренним переменным (поляризации и импульсы частиц в системе центра инерции)[1]. В результате такого суммирования функция ρ может зависеть только от k, а ввиду ее скалярности — только от k^2. В частности, ρ не зависит от направления $\mathbf{k}$. Имея в виду эти свойства функции ρ, переписываем (104,8) в виде

$$\Pi(\xi) = -i\int_0^\infty d\omega \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\rho(k^2)\, e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}-i\omega|\tau|} =$$

$$= -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\iint_0^\infty d\omega\, d(\mu^2)\,\delta(\mu^2-k^2)\,\rho(\mu^2)\, e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi}-i\omega|\tau|}.$$

Переход к импульсному представлению осуществляется подстановкой сюда формулы

$$e^{-i\omega|\tau|} = 2i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_0\tau}\frac{1}{k_0^2-\omega^2+i0}\frac{dk_0}{2\pi} \tag{104,10}$$

(использованной уже в § 76) и дает

$$\Pi(k^2) = \int_0^\infty d(\mu^2)\int_0^\infty d(\omega^2)\,\delta(\mu^2+\mathbf{k}^2-\omega^2)\frac{\rho(\mu^2)}{k_0^2-\omega^2+i0},$$

или окончательно[2])

$$\Pi(k^2) = \int_0^\infty \frac{\rho(\mu^2)\, d\mu^2}{k^2-\mu^2+i0}. \tag{104,11}$$

Коэффициент ρ в этом интегральном представлении называют *спектральной плотностью* функции $\Pi(k^2)$. Он обладает

---

[1]) Такое определение состояний $|n\rangle$, очевидно, тождественно с определением их как состояний, для которых отличны от нуля матричные элементы $\langle 0|j|n\rangle$ зарядово-нечетного оператора.

[2]) Формальные вычисления, аналогичные произведенным выше, требуют осторожности ввиду наличия упоминавшихся уже расходимостей. Это приводит, в частности, к появлению в правой части (104,11) дополнительных расходящихся членов, не имеющих явно релятивистски инвариантного вида (так называемые *швингеровские члены*). Мы не выписываем их, поскольку они все равно исчезают при перенормировке (см. § 110) и не сказываются на дальнейших результатах.

свойствами:

$$\begin{aligned} \rho(k^2) &= 0 \text{ при } k^2 < 0, \\ \rho(k^2) &> 0 \text{ при } k^2 > 0. \end{aligned} \tag{104,12}$$

Действительно, 4-импульс k виртуального фотона, который может родить систему реальных частиц, непременно времениподобен (k^2 совпадает с квадратом полной энергии частиц в системе их центра инерции). В силу же условия поперечности (104,7) имеем

$$P_n^{\mu}\langle 0 | j_{\mu}(0) | n\rangle = 0.$$

Но 4-вектор $\langle 0|j|n\rangle$, ортогональный времениподобному 4-вектору (P_n), пространственноподобен, т. е.

$$\langle 0 | j_{\mu}(0) | n\rangle\langle 0 | j^{\mu}(0) | n\rangle^* < 0,$$

а потому согласно определению (104,9) $\rho > 0$.

§ 105. Точный электронный пропагатор

Подобно фотонному, точный электронный пропагатор определяется формулой

$$\mathcal{G}_{ik}(x - x') = -i\langle 0 | \mathrm{T}\psi_i(x)\bar{\psi}_k(x') | 0\rangle \tag{105,1}$$

(i, k — биспинорные индексы), отличающейся от определения (75,1) пропагатора свободных частиц

$$G_{ik}(x - x') = -i\left\langle 0 \left| \mathrm{T}\psi_i^{\mathrm{int}}(x)\bar{\psi}_k^{\mathrm{int}}(x') \right| 0\right\rangle \tag{105,2}$$

заменой ψ-операторов в представлении взаимодействия гейзенберговскими.

Те же рассуждения, что и при выводе (103,7), позволяют преобразовать $\mathcal{G}_{ik}$ к виду

$$\mathcal{G}_{ik}(x - x') = -i\frac{\left\langle 0 \left| \mathrm{T}\psi_i^{\mathrm{int}}(x)\bar{\psi}_k^{\mathrm{int}}(x') S \right| 0\right\rangle}{\langle 0 | S | 0\rangle}. \tag{105,3}$$

Разложение этого выражения по степеням e^2 приводит к представлению $\mathcal{G}$-функции в виде совокупности диаграмм с двумя внешними электронными линиями и различным числом вершин. При этом роль знаменателя в (105,3) снова сводится к необходимости учитывать лишь диаграммы без изолированных «вакуумных петель». Так, с точностью до членов $\sim e^4$ графическое