свойствами:

$$\begin{aligned} \rho(k^2) &= 0 \text{ при } k^2 < 0, \\ \rho(k^2) &> 0 \text{ при } k^2 > 0. \end{aligned} \qquad (104,12)$$

Действительно, 4-импульс k виртуального фотона, который может родить систему реальных частиц, непременно времениподобен (k^2 совпадает с квадратом полной энергии частиц в системе их центра инерции). В силу же условия поперечности (104,7) имеем

$$P_n^\mu \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle = 0.$$

Но 4-вектор $\langle 0 | j | n \rangle$, ортогональный времениподобному 4-вектору (P_n), пространственноподобен, т. е.

$$\langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle 0 | j^\mu(0) | n \rangle^* < 0,$$

а потому согласно определению (104,9) $\rho > 0$.

§ 105. Точный электронный пропагатор

Подобно фотонному, точный электронный пропагатор определяется формулой

$$\mathcal{G}_{ik}(x - x') = -i \langle 0 | \mathrm{T} \psi_i(x) \bar{\psi}_k(x') | 0 \rangle \qquad (105,1)$$

(i, k — биспинорные индексы), отличающейся от определения (75,1) пропагатора свободных частиц

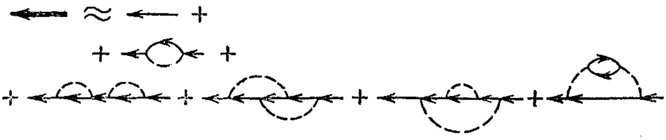
$$G_{ik}(x - x') = -i \left\langle 0 \left| \mathrm{T} \psi_i^{\mathrm{int}}(x) \bar{\psi}_k^{\mathrm{int}}(x') \right| 0 \right\rangle \qquad (105,2)$$

заменой ψ-операторов в представлении взаимодействия гейзенберговскими.

Те же рассуждения, что и при выводе (103,7), позволяют преобразовать $\mathcal{G}_{ik}$ к виду

$$\mathcal{G}_{ik}(x - x') = -i \frac{\left\langle 0 \left| \mathrm{T} \psi_i^{\mathrm{int}}(x) \bar{\psi}_k^{\mathrm{int}}(x') S \right| 0 \right\rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}. \qquad (105,3)$$

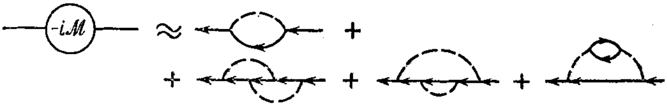
Разложение этого выражения по степеням e^2 приводит к представлению $\mathcal{G}$-функции в виде совокупности диаграмм с двумя внешними электронными линиями и различным числом вершин. При этом роль знаменателя в (105,3) снова сводится к необходимости учитывать лишь диаграммы без изолированных «вакуумных петель». Так, с точностью до членов $\sim e^4$ графическое представление пропагатора $\mathscr{G}$ (жирная сплошная линия) имеет вид[1])



(105,4)

Жирной сплошной линии сопоставляется (в импульсном представлении) функция $i\mathscr{G}(p)$, а всем сплошным и пунктирным линиям в диаграммах правой стороны равенства — пропагаторы свободных частиц соответственно iG и $-iD$.

Блок, заключенный между двумя электронными линиями, называют *электронной собственно-энергетической частью.* Как и в фотонном случае, такую часть называют *компактной*, если она не может быть разделена дальше на две другие собственно-энергетические части путем рассечения по одной электронной линии. Сумму всех возможных компактных частей обозначим посредством $-i\mathscr{M}_{ik}$; функцию $\mathscr{M}_{ik}(p)$ называют *массовым оператором.* Так, с точностью до членов $\sim e^4$



(105,5)

Путем суммирования, в точности аналогичного выводу (103,13), получим

$$\mathscr{G}(p) = G(p) + G(p)\,\mathscr{M}(p)\,\mathscr{G}(p) \qquad (105,6)$$

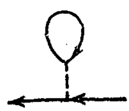
(биспинорные индексы опускаем), или, для обратных матриц,

$$\mathscr{G}^{-1}(p) = G^{-1}(p) - \mathscr{M}(p) = \gamma p - m - \mathscr{M}(p). \qquad (105,7)$$

В § 102 уже было отмечено, что гейзенберговские ψ-операторы (в противоположность ψ-операторам в представлении взаимодействия) меняются в результате калибровочного преобразования электромагнитных потенциалов. Вместе с ними оказывается калибровочно-неинвариантным также и точный электронный пропагатор $\mathscr{G}$. Выясним закон его калибровочного преобразования (*Л. Д. Ландау, И. М. Халатников*, 1952).

---

[1]) Как уже было объяснено в § 103, не надо учитывать также и диаграммы с «замкнутыми на себя» линиями, которые появились бы здесь уже во втором порядке:



Заранее ясно, что изменение $\mathcal{G}$ при калибровочном преобразовании должно выражаться через ту же величину $D^{(l)}$, которая добавляется при этом преобразовании к фотонному пропагатору. Это станет очевидным, если заметить, что при вычислении $\mathcal{G}$ по диаграммам теории возмущений каждый член ряда выражается через функции D и никаких других электромагнитных величин в них не входит. Этим обстоятельством можно воспользоваться для упрощения выводов: можно делать любые частные предположения о свойствах произвольного оператора $\hat{\chi}$ в преобразовании (102,8), лишь бы ответ был выражен через $D^{(l)}$.

В результате преобразования (102,8) пропагаторы $\mathcal{D}$ (103,1) и $\mathcal{G}$ (105,1) переходят в

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu} &\to i\langle 0|\,\mathrm{T}\left[A_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x)\right]\left[A_\nu(x') - \partial'_\nu\chi(x')\right]|0\rangle, \\ \mathcal{G}_{ik} &\to -i\langle 0|\,\mathrm{T}\psi_i(x)\,e^{ie\chi(x)}e^{-ie\chi(x')}\bar{\psi}_k(x')\,|0\rangle. \end{aligned} \qquad (105,8)$$

Будем считать теперь, что операторы $\hat{\chi}$ усредняются независимо от всех остальных операторных множителей в T-произведении; это предположение вполне естественно, поскольку в силу калибровочной инвариантности «поле» $\hat{\chi}$ не принимает никакого участия во взаимодействии. Положим также, что обращается в нуль среднее по вакууму от самого оператора $\hat{\chi}$: $\langle 0|\chi|0\rangle = 0$. Тогда в (105,8) члены, содержащие $\hat{\chi}$, отделяются и получается

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \to \mathcal{D}_{\mu\nu} + i\langle 0|\,\mathrm{T}\,\partial_\mu\chi(x)\cdot\partial'_\nu\chi(x')\,|0\rangle, \qquad (105,9)$$

$$\mathcal{G}_{ik} \to \mathcal{G}_{ik}\langle 0|\,\mathrm{T}e^{ie\chi(x)}e^{-ie\chi(x')}\,|0\rangle. \qquad (105,10)$$

Дальнейший вывод произведем для бесконечно малого преобразования; чтобы подчеркнуть эту малость, будем писать $\delta\hat{\chi}$ вместо $\hat{\chi}$.

Преобразование (105,9) можно (независимо от малости $\delta\hat{\chi}$) записать в виде[1])

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \to \mathcal{D}_{\mu\nu} + \delta\mathcal{D}_{\mu\nu}, \quad \delta\mathcal{D}_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial'_\nu d^{(l)}(x - x'), \qquad (105,11)$$

где

$$d^{(l)}(x - x') = i\langle 0|\,\mathrm{T}\delta\chi(x)\,\delta\chi(x')\,|0\rangle. \qquad (105,12)$$

Отсюда видно, что функция $d^{(l)}$ определяет изменение при калибровочном преобразовании продольной части фотонного пропагатора $\mathcal{D}^{(l)}$. Предположение о зависимости этой функции только от разности $x - x'$ означает, конечно, определенное ограничение на свойства оператора $\delta\hat{\chi}$; в общем случае вполне произвольного

---

[1]) Переход от (105,9) к (105,11) возможен, если функция $d^{(l)}$ и ее производная по t непрерывны при $t = t'$. В противном случае правые части этих выражений отличались бы δ-функционными членами (ср. вывод формулы (75,2)). В импульсном представлении это условие эквивалентно предположению о том, что $d^{(l)}(q)$ убывает при $|q^2| \to \infty$ быстрее, чем $1/q^2$.

калибровочного преобразования пространственно-временная однородность пропагатора может нарушиться.

В преобразовании же (105,10) разлагаем экспоненциальные множители по степеням $\delta\hat{\chi}$ с точностью до квадратичных членов:

$$\langle 0|\,\mathrm{T}e^{ie\delta\chi(x)}e^{-ie\delta\chi(x')}\,|0\rangle \approx$$
$$\approx -\frac{1}{2}e^2\langle 0|\,\delta\chi^2(x)+\delta\chi^2(x')-2\mathrm{T}\delta\chi(x)\,\delta\chi(x')\,|0\rangle.$$

С учетом определения (105,12) находим, таким образом, следующий закон преобразования электронного пропагатора:

$$\mathcal{G}\to\mathcal{G}+\delta\mathcal{G},\quad \delta\mathcal{G}=ie^2\mathcal{G}(x-x')\,[d^{(l)}(0)-d^{(l)}(x-x')]. \qquad (105,13)$$

В импульсном представлении[1]):

$$\delta\mathcal{G}(p)=ie^2\int d^{(l)}(q)\,[\mathcal{G}(p)-\mathcal{G}(p-q)]\,\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \qquad (105,14)$$

При этом функция $d^{(l)}(q)$ связана с изменением функции $\mathcal{D}^{(l)}$ согласно

$$\delta\mathcal{D}^{(l)}(q)=q^2d^{(l)}(q). \qquad (105,15)$$

Для электронного пропагатора можно было бы получить интегральное представление, аналогичное формуле (104,11). Его вывод основан на выражениях

$$\psi_{nm}(x)=\psi_{nm}(0)\,e^{-i(P_m-P_n)x} \qquad (105,16)$$

для матричных элементов ψ-оператора, подобных использованным в § 104 выражениям (104,6) для матричных элементов тока. В противоположность току, однако, сами ψ-операторы калибровочно-неинвариантны. Поэтому и координатная зависимость вида (105,16) не имеет общего характера, а относится лишь к некоторой определенной калибровке. Тем самым относится лишь к определенной калибровке и основанное на (105,16) интегральное представление пропагатора. Более глубокая физическая при-

---

[1]) Если функция $f(x)=f_1(x)f_2(x)$, то ее компоненты Фурье

$$f(p)=\int f(x)\,e^{ipx}\,d^4x=$$
$$=\iiint d^4x\,\frac{d^4q_1d^4q_2}{(2\pi)^8}\,e^{ix(p-q_1-q_2)}f_1(q_1)\,f_2(q_2)=$$
$$=\iint\frac{d^4q_1d^4q_2}{(2\pi)^4}\,\delta^{(4)}(p-q_1-q_2)\,f_1(q_1)\,f_2(q_2)=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,f_1(q)\,f_2(p-q).$$

При переходе от (105,13) к (105,14) учтено также, что

$$f(x=0)=\int f(q)\,\frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

чина этой ситуации состоит в том, что равенство нулю массы фотона приводит к инфракрасной катастрофе (см. § 98). Вследствие этого электрон в процессе взаимодействия испускает бесконечное число мягких квантов, что в значительной степени лишает прямого смысла «одночастичный» пропагатор (105,1).

§ 106. Вершинный оператор

В сложных диаграммах можно выделить, наряду с собственно-энергетическими частями, также и не сводящиеся к ним блоки другого вида. К важной категории таких блоков мы придем, рассмотрев функцию

$$K^{\mu}_{ik}(x_1,\ x_2,\ x_3) = \langle 0 | \mathrm{T} A^{\mu}(x_1)\, \psi_i(x_2)\, \bar{\psi}_k(x_3) | 0 \rangle \qquad (106,1)$$

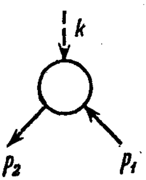
с одним 4-векторным и двумя биспинорными индексами; в силу однородности пространства-времени она зависит лишь от разностей аргументов x_1, x_2, x_3. Выраженная через операторы в представлении взаимодействия, функция K имеет вид

$$K^{\mu}_{ik}(x_1,\ x_2,\ x_3) = \frac{\langle 0 | \mathrm{T} A^{\mu}_{\mathrm{int}}(x_1)\, \psi^{\mathrm{int}}_i(x_2)\, \bar{\psi}^{\mathrm{int}}_k(x_3)\, S | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}. \qquad (106,2)$$

Переход к импульсному представлению осуществляется формулой

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + k - p_2)\, K^{\mu}_{ik}(p_2,\ p_1;\ k) =$$
$$= \iiint K^{\mu}_{ik}(x_1,\ x_2,\ x_3)\, e^{-ikx_1 + ip_2x_2 - ip_1x_1}\, d^4x_1\, d^4x_2\, d^4x_3. \qquad (106,3)$$

В диаграммной технике функциям K^{μ}_{ik} соответствуют блоки (*треххвостки*) вида



(106,4)

с тремя (одним фотонным и двумя электронными) концами, импульсы которых связаны законом сохранения

$$p_1 + k = p_2. \qquad (106,5)$$

Член нулевого порядка в разложении этой функции обращается в нуль, а член первого порядка в координатном