

чина этой ситуации состоит в том, что равенство нулю массы фотона приводит к инфракрасной катастрофе (см. § 98). Вследствие этого электрон в процессе взаимодействия испускает бесконечное число мягких квантов, что в значительной степени лишает прямого смысла «одночастичный» пропагатор (105,1).

§ 106. Вершинный оператор

В сложных диаграммах можно выделить, наряду с собственно-энергетическими частями, также и не сводящиеся к ним блоки другого вида. К важной категории таких блоков мы придем, рассмотрев функцию

$$K_{ik}^\mu(x_1, x_2, x_3) = \langle 0 | T A^\mu(x_1) \psi_i(x_2) \bar{\psi}_k(x_3) | 0 \rangle \quad (106,1)$$

с одним 4-векторным и двумя биспинорными индексами; в силу однородности пространства-времени она зависит лишь от разностей аргументов x_1, x_2, x_3 . Выраженная через операторы в представлении взаимодействия, функция K имеет вид

$$K_{ik}^\mu(x_1, x_2, x_3) = \frac{\langle 0 | T A_{int}^\mu(x_1) \psi_i^{int}(x_2) \bar{\psi}_k^{int}(x_3) S | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}. \quad (106,2)$$

Переход к импульсному представлению осуществляется формулой

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + k - p_2) K_{ik}^\mu(p_2, p_1; k) = \iiint K_{ik}^\mu(x_1, x_2, x_3) e^{-ikx_1 + ip_2x_2 - ip_1x_3} d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3. \quad (106,3)$$

В диаграммной технике функциям K_{ik}^μ соответствуют блоки ((*треххвостки*)) вида



с тремя (одним фотонным и двумя электронными) концами, импульсы которых связаны законом сохранения

$$p_1 + k = p_2. \quad (106,5)$$

Член нулевого порядка в разложении этой функции обращается в нуль, а член первого порядка в координатном

представлении

$$K^\mu(x_1, x_2, x_3) = e \int G(x_2 - x) \gamma_\nu G(x - x_3) \cdot D^{\nu\mu}(x_1 - x) d^4x$$

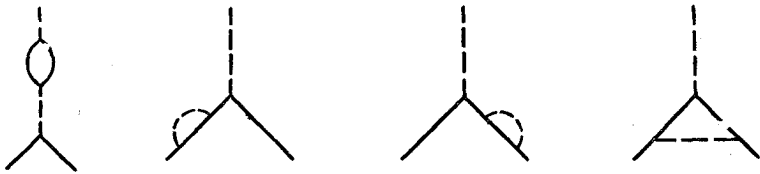
или в импульсном представлении

$$K^\mu(p_2, p_1; k) = eG(p_2) \gamma_\nu G(p_1) \cdot D^{\nu\mu}(k) \quad (106,6)$$

(биспинорные индексы опущены); соответствующая диаграмма:



При переходе к следующим приближениям диаграммы усложняются за счет добавления новых вершин. Не все такие диаграммы, однако, дают нечто существенно новое. Так, в третьем порядке возникают диаграммы



(106,8)

Первые три можно расщепить (по одной фотонной или электронной линии) на простую вершину (106,7) и собственно-энергетическую часть второго порядка; для четвертой диаграммы такое разбиение невозможно. Эта ситуация имеет общий характер. Поправки первого рода приведут просто к замене в (106,6) множителей G и D точными пропагаторами \mathcal{G} и \mathcal{D} . Остальные же члены разложения в сумме дадут новую величину, которая заменит в (106,6) множитель γ^μ . Обозначив эту величину Γ^μ , получим, таким образом, по определению

$$K^\mu(p_2, p_1; k) = \{i\mathcal{G}(p_2) [-ie\Gamma_\nu(p_2, p_1; k)] i\mathcal{G}(p_1)\} [-i\mathcal{D}^{\nu\mu}(k)]. \quad (106,9)$$

Блок, соединенный с другими частями диаграммы одной фотонной и двумя электронными линиями, называют *вершинной частью*, если этот блок нельзя разделить на части, соединенные между собой лишь одной (электронной или фотонной) линией. Величина Γ^μ представляет собой сумму всего (бесконечного) множества вершинных частей, включая простую вершину γ^μ ; ее называют *вершинным оператором*, или *вершинной функцией*.

Приведем все диаграммы вершинного оператора с точностью до величин пятого порядка:

$$\begin{aligned}
 -ie\Gamma \approx & \text{diagram } a + \text{diagram } б + \text{diagram } в + \text{diagram } г + \\
 & + \text{diagram } д + \text{diagram } е + \text{diagram } ж + \text{diagram } з + \text{diagram } и
 \end{aligned}
 \tag{106,10}$$

(точный вершинный оператор $-ie\Gamma$ мы обозначаем черной точкой).

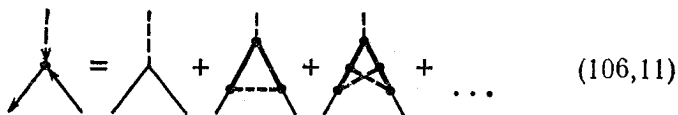
Оператор Γ (как и оператор γ простой вершины) имеет два матричных (биспинорных) и один 4-векторный индекс; он является функцией двух электронных (p_1, p_2) и одного фотонного (k) импульсов. При этом все три импульса не могут одновременно относиться к реальным частицам: диаграмма (106,4) сама по себе (не как часть более сложной диаграммы) отвечала бы поглощению фотона свободным электроном, но такой процесс несовместим с законом сохранения 4-импульса реальных частиц. Поэтому хотя бы один из трех концов диаграммы должен относиться к виртуальной частице (или к внешнему полю).

Вершинные части можно разделить еще на две категории: *неприводимые* и *приводимые*. Неприводимыми называют те из них, которые не содержат в себе собственно-энергетических поправок к внутренним линиям и в которых нельзя выделить частей, представляющих собой поправки (более низкого порядка) к внутренним вершинам. Так, из диаграмм (106,10) неприводимы лишь *б*) и *г*) (не считая простой вершины *а*)). Диаграммы *ж*), *з*), *и*) содержат собственно-энергетические части; в диаграмме *в*) верхний горизонтальный пунктир можно рассматривать как поправку к верхней вершине, а боковые пунктиры в диаграммах *д*) и *е*) — как поправки к боковым вершинам.

Заменив в неприводимых диаграммах внутренние линии такими же жирными линиями, а вершины — черными точками (т. е. заменив приближенные пропагаторы D, G точными \mathcal{D}, \mathcal{G} , а приближенные вершинные операторы γ — точными Γ)¹⁾, мы получим, очевидно, совокупность всех вообще вершинных частей.

¹⁾ Получающиеся таким образом диаграммы называют *скелетными*.

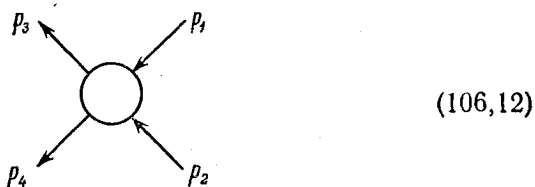
Таким образом, разложение вершинного оператора имеет вид



Это равенство представляет собой по отношению к Γ интегральное уравнение с бесконечным числом членов в правой стороне.

Из изложенного ясен общий принцип составления точных выражений из диаграммных блоков с любым числом концов. Они строятся как средние по вакууму от T -произведений гейзенберговских операторов: по одному оператору $\hat{\psi}(x)$ на каждый конечный электрон, $\hat{\bar{\psi}}(x)$ — на каждый начальный электрон и $\hat{A}(x)$ — на каждый фотон.

Приведем еще один пример: диаграммы вида



с четырьмя электронными концами («электронная четыреххвостка»). Мы придем к таким диаграммам, рассмотрев функцию

$$K_{ik,lm}(x_1, x_2; x_3, x_4) = \langle 0 | T \psi_i(x_1) \psi_k(x_2) \bar{\psi}_l(x_3) \bar{\psi}_m(x_4) | 0 \rangle \quad (106,13)$$

(зависящую, конечно, лишь от разностей четырех аргументов). Ее компоненты Фурье можно представить в виде

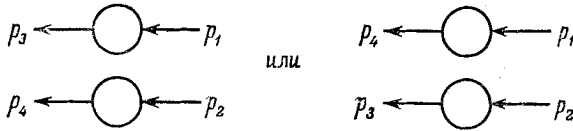
$$\int K_{ik,lm}(x_1, x_2; x_3, x_4) e^{i(p_3 x_1 + p_4 x_2 - p_3 x_3 - p_4 x_4)} d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 = \\ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) K_{ik,lm}(p_3, p_4; p_1, p_2), \quad (106,14)$$

причем

$$K_{ik,lm}(p_3, p_4; p_1, p_2) = \\ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_3) \mathcal{G}_{il}(p_1) \mathcal{G}_{km}(p_2) - (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 - p_3) \mathcal{G}_{im}(p_1) \mathcal{G}_{kl}(p_2) + \\ + \mathcal{G}_{in}(p_3) \mathcal{G}_{kr}(p_4) [-i\Gamma_{nr,st}(p_3, p_4; p_1, p_2)] \mathcal{G}_{sl}(p_1) \mathcal{G}_{tm}(p_2). \quad (106,15)$$

В выражении (106,15) первые два члена исключают из определения функции $\Gamma(p_3, p_4; p_1, p_2)$ диаграммы, распадающиеся на две не связанные между собой части с двумя внешними концами

каждая:



В третьем же члене множителя \mathcal{G} исключают из определения Γ те части диаграммы, которые представляют собой поправки к внешним электронным линиям.

Отметим также, что по свойствам T -произведения фермиевских ψ -операторов функции $\Gamma(p_3, p_4; p_1, p_2)$ обладают свойствами антисимметрии:

$$\Gamma_{ik,lm}(p_3, p_4; p_1, p_2) = -\Gamma_{ki,lm}(p_4, p_3; p_1, p_2) = -\Gamma_{ik,ml}(p_3, p_4; p_2, p_1). \quad (106,16)$$

Если импульсы p_1, p_2, p_3, p_4 отвечают реальным частицам, то нераспадающиеся диаграммы (106,12) изображают процесс рассеяния двух электронов. Мы получим амплитуду этого процесса, сопоставив внешним концам диаграммы волновые амплитуды частиц (вместо пропагаторов \mathcal{G})¹⁾:

$$iM_{fi} = \bar{u}_i(p_3) \bar{u}_k(p_4) [-ie\Gamma_{ik,lm}(p_3, p_4; p_1, p_2)] u_l(p_1) u_m(p_2). \quad (106,17)$$

Ввиду (106,16) эта амплитуда автоматически обладает должной антисимметрией по отношению к перестановкам электронов.

§ 107. Уравнения Дайсона

Точные пропагаторы и вершинная часть связаны между собой определенными интегральными соотношениями. Их происхождение становится в особенности ясным из диаграммного метода.

Введенное в предыдущем параграфе понятие о неприводимости или приводимости распространяется не только на вершинные части, но и на любые другие диаграммы (или их части). Рассмотрим с этой точки зрения компактные собственно-энергетические электронные диаграммы.

Легко сообразить, что из всего бесконечного множества этих диаграмм лишь одна неприводима; это — диаграмма второго порядка



¹⁾ Мы увидим в дальнейшем (см. § 110), что при составлении амплитуд реальных процессов не надо учитывать собственно-энергетических частей в свободных концах диаграммы.