§ 108. Тождество Уорда

Еще одна связь между фотонным пропагатором и вершинной частью, более простая, чем уравнение Дайсона, возникает как следствие калибровочной инвариантности.

Для ее вывода совершим калибровочное преобразование (102,8), предполагая $\chi(x) \equiv \delta\chi(x)$ бесконечно малой простой (неоператорной) функцией 4-координат x. Тогда электронный пропагатор изменится на величину

$$\delta\mathcal{G}(x, x') = ie\mathcal{G}(x - x')[\delta\chi(x) - \delta\chi(x')]. \qquad (108,1)$$

Подчеркнем, что калибровочное преобразование такого вида нарушает пространственно-временную однородность и функция $\delta\mathcal{G}$ зависит уже от аргументов x и x' по отдельности, а не только от разности $x - x'$. Ее разложение Фурье происходит поэтому по переменным x и x' в отдельности. Другими словами, в импульсном представлении $\delta\mathcal{G}$ является функцией двух 4-импульсов:

$$\delta\mathcal{G}(p_2, p_1) = \iint \delta\mathcal{G}(x, x')\, e^{ip_2x - ip_1x'} d^4x\, d^4x'.$$

Подставив сюда (108,1) и произведя интегрирование по $d^4x\, d^4\xi$ или $d^4\xi\, d^4x'$ $(\xi = x - x')$, получим

$$\delta\mathcal{G}(p + q, p) = ie\delta\chi(q)[\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p + q)]. \qquad (108,2)$$

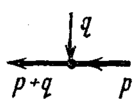
С другой стороны, при том же калибровочном преобразовании к оператору $\hat{A}_\mu(x)$ добавляется функция

$$\delta A_\mu^{(e)}(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta\chi, \qquad (108,3)$$

которую можно рассматривать как бесконечно малое внешнее поле. В импульсном представлении:

$$\delta A_\mu^{(e)}(q) = iq_\mu\delta\chi(q). \qquad (108,4)$$

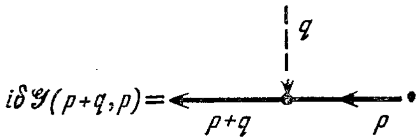
Величину $\delta\mathcal{G}$ можно вычислить и как изменение пропагатора под влиянием этого поля. С точностью до величин первого порядка по $\delta\chi$ это изменение изобразится, очевидно, одной скелетной диаграммой:

$i\delta\mathcal{G}(p+q, p) =$ 

Здесь жирный пунктир — эффективная линия внешнего поля, т. е. ей сопоставляется множитель (см. (103,15))

$$\delta A_\mu^{(e)}(q) + \delta A_\lambda^{(e)}(q)\frac{\mathcal{P}^{\lambda\nu}(q)}{4\pi}\mathcal{D}_{\nu\mu}(q).$$

Но 4-вектор $\delta A_\lambda^{(e)}(q)$ продолен (по отношению к q), а тензор $\mathcal{P}^{\lambda\nu}$ поперечен. Поэтому второй член здесь обращается в нуль, так что остается



(108,5)

где тонкому пунктиру сопоставляется обычным образом просто поле $\delta A^{(e)}$. В аналитической форме:

$$\delta\mathcal{G} = e\mathcal{G}(p+q)\,\Gamma^\mu(p+q,\ p;\ q)\,\mathcal{G}(p)\cdot\delta A_\mu^{(e)}. \tag{108,6}$$

Подставив сюда (108,4) и сравнив с (108,2), находим соотношение

$$\mathcal{G}(p+q) - \mathcal{G}(p) = -\mathcal{G}(p+q)\,\Gamma^\mu(p+q,\ p;\ q)\,\mathcal{G}(p)\cdot q_\mu$$

или для обратных матриц

$$\mathcal{G}^{-1}(p+q) - \mathcal{G}^{-1}(p) = q_\mu\Gamma^\mu(p+q,\ p;\ q) \tag{108,7}$$

(*H. S. Green*, 1953).

Устремив в этом равенстве $q\to 0$ и сравнив коэффициенты при бесконечно малом q_μ в обеих его сторонах, получим

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\mathcal{G}^{-1}(p) = \Gamma^\mu(p,\ p;\ 0). \tag{108,8}$$

Это — так называемое *тождество Уорда* (*J. C. Ward*, 1950). Мы видим, что производная по импульсу от $\mathcal{G}^{-1}(p)$ совпадает с вершинным оператором при нулевой передаче импульса[1]). Производная же от самой функции $\mathcal{G}(p)$

$$-\frac{\partial}{\partial p_\mu}i\mathcal{G}(p) = i\mathcal{G}(p)\,[-i\Gamma^\mu(p,\ p;\ 0)]\,i\mathcal{G}(p). \tag{108,9}$$

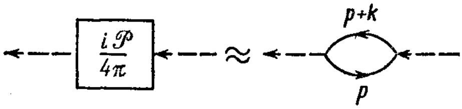
Аналогичным образом можно было бы найти также и высшие производные, проводя вычисления с точностью до членов более высоких порядков по $\delta\chi$. Нам такие формулы, однако, не понадобятся.

Рассмотрим теперь производную $\partial\mathcal{P}(k)/\partial k_\mu$ от поляризационного оператора. В отличие от функции $\mathcal{G}(p)$ величина $\mathcal{P}(k)$ калибровочно-инвариантна и не меняется при введении фиктивного внешнего поля (108,4). Поэтому производную от $\mathcal{P}$ нельзя вычислить тем же способом. Однако и для нее можно получить определенное диаграммное выражение.

---

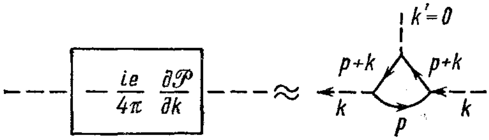
[1]) В нулевом приближении, т. е. для пропагатора свободных частиц, это тождество очевидно: $G^{-1}(p) = \gamma p - m$, и потому $\partial G^{-1}/\partial p_\mu = \gamma^\mu$.

Для этого рассмотрим первую из диаграмм, входящих в определение $\mathcal{P}$, — диаграмму второго порядка



(108,10)

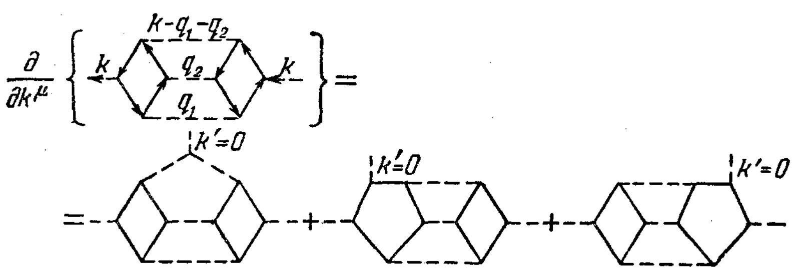
Сплошным линиям в ней отвечают множители $iG(p)$ и $iG(p+k)$. Дифференцирование по k заменит второй из них на $i\partial G(p+k)/\partial k$, а согласно тождеству (108,9) такая замена эквивалентна добавлению лишней вершины на электронной линии:



(108,11)

Мы видим, что в первом неисчезающем порядке искомая производная выразилась через диаграмму с тремя фотонными концами («фотонная треххвостка»). Сразу же подчеркнем, что эта диаграмма сама по себе отнюдь не дает амплитуду превращения одного фотона в два. Амплитуда такого процесса выразилась бы суммой диаграммы (108,11) и другой такой же диаграммы с измененным направлением обхода петли; согласно теореме Фарри эта сумма обращается в нуль. Сама же по себе диаграмма (108,11) не равна нулю.

Подобным образом можно дифференцировать и более сложные диаграммы, последовательно добавляя вершины с $k'=0$ на все электронные линии, зависящие от k. Существуют, однако, диаграммы, в которых зависимость от k имеется и во внутренних фотонных линиях, например диаграмма слева на рисунке



Производная от графика в фигурной скобке представлена здесь в диаграммном виде путем введения нового графического обозначения — фиктивной трехчастичной фотонной вершины — точки, в которой сходятся три пунктира и которой сопоставляется величина

$$4\pi i \frac{\partial D^{-1}}{\partial k^{\mu}} = 2ik_{\mu} \equiv v_{\mu}. \tag{108,12}$$

Теперь можно дифференцировать любой график, добавляя на зависящие от k линии вершины v_{μ} или γ_{μ} и вычисляя далее по общим правилам. Суммируя эти высшие поправки, получаем

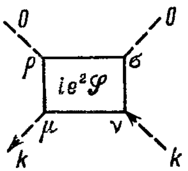
$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathcal{P}_{\mu\nu}}{\partial k^{\lambda}} = \mathcal{V}_{\mu\lambda\nu}, \tag{108,13}$$

где $ie\mathcal{V}_{\mu\lambda\nu}$ — сумма внутренних частей всех полученных указанным способом «фотонных трехвосток».

Для дальнейшего нам понадобится еще и вторая производная поляризационного оператора. Аналогичным образом дифференцируя еще раз равенство (108,13), имеем

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathcal{P}_{\mu\nu}}{\partial k^{\rho}\partial k^{\sigma}} = \mathcal{G}_{\mu\rho\sigma\nu} + \mathcal{G}_{\mu\sigma\rho\nu}, \tag{108,14}$$

где $ie^2\mathcal{G}$ — сумма внутренних частей всех «фотонных четырехвосток» вида



(108,15)

(разумеется, с включением и графиков с фиктивными трехфотонными вершинами (108,12)).

§ 109. Электронный пропагатор во внешнем поле

Если система находится в заданном внешнем поле $A^{(e)}(x)$, то точный электронный пропагатор определяется той же формулой (105,1), но в гамильтониан $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, осуществляющий преобразование к гейзенберговскому представлению операторов, входит также и взаимодействие электронов с внешним полем:

$$\hat{V} = e\int \hat{A}_{\mu}\hat{j}^{\mu}d^3x + e\int A_{\mu}^{(e)}\,\hat{j}^{\mu}d^3x. \tag{109,1}$$

Поскольку внешнее поле нарушает однородность пространства и времени, то пропагатор $\mathcal{G}(x, x')$ будет зависеть теперь уже от обоих аргументов x и x' в отдельности, а не только от их разности $x - x'$.